

**Streutheorie für elliptische partielle
Differentialoperatoren und eine daraus
abgeleitete allgemeine Klasse von Operatoren**

Inaugural-Dissertation

zur Erlangung des Doktorgrades
der Fakultät für Mathematik der
Ludwig-Maximilians-Universität
in München

Vorgelegt von

Michael Winkler
aus Haimhausen

im Mai 1974



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41551925_0013

Streutheorie für elliptische partielle Differentialoperatoren und eine daraus abgeleitete allgemeine Klasse von Operatoren

Inaugural-Dissertation

zur Erlangung des Doktorgrades
der Fakultät für Mathematik der
Ludwig-Maximilians-Universität
in München



Vorgelegt von

Michael Winkler
aus Haimhausen

im Mai 1974



1. Berichterstatter : Professor Dr. J. Weidmann

2. Berichterstatter : Dozent Dr. C.G. Simader

Tag der mündlichen Prüfung : 3. August 1974

Inhaltsverzeichnis

	Seite
§ 1 Einleitung und Ergebnisse	5
§ 2 Einige vergleichende Bemerkungen	24
§ 3 Die stationäre Methode	33
§ 4 Der ungestörte Operator H_1	51
§ 5 Der Beweis von Theorem 1.16	86
§ 6 Der Beweis von Theorem 1.17	102
§ 7 Der Beweis der Folgerung 1.18 und von Theorem 1.19	108
§ 8 Der Beweis von Theorem 1.20	118

§ 1 Einleitung und Ergebnisse

Die vorliegende Arbeit befaßt sich mit der Anwendung der mathematischen Streutheorie auf elliptische partielle Differentialoperatoren und eine daraus abgeleitete allgemeine Klasse von Operatoren.

Die folgenden Bemerkungen sollen einige Probleme der mathematischen Streutheorie erläutern ([9], Kap.10).

Sei H ein Hilbertraum, in dem die Norm mit $\|\cdot\|_H$ und das im ersten Argument lineare Skalarprodukt mit $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$ bezeichnet wird, H ein selbstadjungierter Operator in H und $E(\cdot)$ seine Spektralschar. Für jedes $u \in H$ definiert die Funktion $\langle u, E(\cdot)u \rangle_H$ ein Maß $\langle u, E(\cdot)u \rangle_H$ auf den Borelmengen $\mathcal{B}$ in $\mathbb{R}$. Wenn H_{ac} (H_s) die Menge derjenigen $u \in H$ bezeichnet, für die das Maß $\langle u, E(\cdot)u \rangle_H$ bezüglich des Lebesgue - Maßes L absolutstetig (singulär) ist, ist $H = H_{ac} \oplus H_s$, die orthogonale Summe der abgeschlossenen linearen Teilräume H_{ac} und H_s .

H_{ac} und H_s reduzieren den Operator H . Die reduzierten Operatoren $H_{ac} = H|_{H_{ac}}$ und $H_s = H|_{H_s}$ heißen der absolutstetige bzw. singuläre Teil von H . Ihr Spektrum $\sigma_{ac}(H)$ und $\sigma_s(H)$ wird als das absolutstetige bzw. singuläre Spektrum von H bezeichnet. Falls $H = H_{ac}$, heißt H absolutstetig.

Sind H_1 und H_2 zwei selbstadjungierte Operatoren in H ,

so werden die Operatoren

$$(1.1) \quad W_{\pm} := W_{\pm}(H_2, H_1) := s\text{-}\lim_{t \rightarrow \pm\infty} e^{itH_2} e^{-itH_1} P_{1,ac}$$

($P_{1,ac}$ ist die Projektion auf $H_{1,ac}$), falls sie existieren, als Wellenoperatoren bzgl. H_1 und H_2 bezeichnet.

Sie sind partielle Isometrien ([9], Kap.10,§3) mit Anfangsbereich $H_{1,ac}$ und Endbereich $M_{\pm} \subset H_{2,ac}$. $M_{\pm}$ reduziert H_2 und es gilt

$$W_{\pm} H_{1,ac} P_{1,ac} = H_2|_{M_{\pm}} W_{\pm}.$$

Demnach sind durch $W_{\pm} H_{1,ac}$ und $H_2|_{M_{\pm}}$ zueinander unitär äquivalent. Für den Fall, daß $M_{\pm} = H_{2,ac}$, werden die Wellenoperatoren vollständig genannt; dann ist $H_2|_{M_{\pm}} = H_{2,ac}$ und $\sigma_{ac}(H_1) = \sigma_{ac}(H_2)$.

Wenn $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Borel-meßbare Funktion ist, sind $\phi(H_1)$ und $\phi(H_2)$ selbstadjungierte Operatoren. Für Borel-meßbare Mengen $I \subset \mathbb{R}$, auf denen für ϕ

$$(1.2) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \left| \int_I f(\lambda) e^{-it\phi(\lambda) - is\lambda} d\lambda \right|^2 ds = 0 \quad (f \in L^2(I))$$

gilt, wird untersucht, ob

$$(1.3) \quad W_{\pm} E_1(I) = s\text{-}\lim_{t \rightarrow \pm\infty} e^{it\phi(H_2)} e^{-it\phi(H_1)} P_{1,ac} E_1(I),$$

insbesondere, ob der Grenzwert auf der rechten Seite in (1.3) existiert. Falls I und ϕ so beschaffen sind, daß $E_1(I)H = H_{1,ac} = H_{\phi(H_1),ac}$, bedeutet dies eine Invarianz der Wellenoperatoren bzgl. ϕ .

In vielen Arbeiten (vgl. [6], [11], [12], [19]) ist H der Hilbertraum $L^2(\mathbb{R}^n)$ und $P(D)$ ein elliptischer partieller Differentialoperator der Ordnung $2m$ mit reellen, konstanten Koeffizienten :

$$(1.4) \quad P(D) = \sum_{|\alpha| \leq 2m} c_\alpha D^\alpha$$

Dabei ist $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$, $|\alpha| = \sum_{\nu=1}^n \alpha_\nu$, $D_\nu = -i \frac{\partial}{\partial x_\nu}$ und $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n}$.

Das Polynom $P_{2m}(x) := \sum_{|\alpha|=2m} c_\alpha x^\alpha$, ($x \in \mathbb{R}^n$), genügt mit positiven Konstanten a, b, c der Ungleichung

$$(1.5) \quad a(1 + |x|^2)^m - b \leq P_{2m}(x) \leq c(1 + |x|^2)^m \quad (x \in \mathbb{R}^n);$$

eine entsprechende Ungleichung gilt demnach für das Polynom

$$(1.6) \quad P(x) := \sum_{|\alpha| \leq 2m} c_\alpha x^\alpha \quad (x \in \mathbb{R}^n).$$

H_1 ist dann die selbstadjungierte Fortsetzung des auf $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ definierten symmetrischen Operators $P(D)$.

Da man das Polynom $P(x)$ auch in der Form

$$P(x) = \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq m} x^\alpha c_{\alpha\beta} x^\beta,$$

wobei $c_{\alpha\beta} = c_{\beta\alpha}^*$, schreiben kann, ergibt sich (vgl. [11], S.223 und [9], Kap.6, §§1,2), daß mit

$$D(h_{1,0}) := C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$$

$$h_{1,0}(u, v) := \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq m} \langle c_{\alpha\beta} D^\beta u, D^\alpha v \rangle \quad (1) \quad (u, v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n),$$

1) Skalarprodukt und Norm in $L^2(\mathbb{R}^n)$ werden mit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und $\|\cdot\|$ bezeichnet.

$h_{1,0}$ eine symmetrische, abschließbare, nach unten beschränkte Sesqui-Linearform ist. H_1 ist der zur Abschließung h_1 von $h_{1,0}$ gehörende selbstadjungierte Operator H_{h_1} .

Der Operator H_2 wird auf verschiedene Weise gebildet :

I) Zu Funktionen $q_{\mu\nu} \in L_{loc}^2$ ¹⁾ und Polynomen $P_\nu(x) = \sum_{|\alpha| \leq m_\nu} c_{\nu,\alpha} x^\alpha$ ($1 \leq \mu, \nu \leq N$) der Ordnung $m_\nu \leq m$ mit konstanten Koeffizienten $c_{\nu,\alpha} \in \mathbb{C}$ und

$$D(h_{2,0}) := C_0^\infty$$

$$h_{2,0}(u,v) := h_1(u,v) + \sum_{\mu,\nu=1}^N \langle q_{\mu\nu} P_\nu(D)u, P_\mu(D)v \rangle \quad (u,v \in C_0^\infty)$$

sind Bedingungen anzugeben (vgl. [11], [19]), so daß $h_{2,0}$ symmetrisch, abschließbar und nach unten beschränkt ist. Dann ist H_2 der zu der Abschließung h_2 von $h_{2,0}$ gehörende Operator H_{h_2} .

II) Mit Funktionen $q_\nu \in L_{loc}^2$ und Polynomen P_ν der Ordnung $m_\nu \leq 2m$ wie in I) ($1 \leq \nu \leq N$) sei

$$D(H_{2,0}) := C_0^\infty$$

$$H_{2,0}u := P(D)u + \sum_{\nu=1}^N q_\nu P_\nu(D)u \quad (u \in C_0^\infty).$$

Unter geeigneten Voraussetzungen für q_ν und P_ν ist $H_{2,0}$ ein wesentlich selbstadjungierter Operator und H_2 seine selbstadjungierte Abschließung.

¹⁾ Funktionenräume $F(\mathbb{R}^n)$ werden in Zukunft stets mit F abgekürzt.

Ein Beispiel für II) liefert

$$\text{III)} \quad H_{2,0}u := P(D)u + \sum_{\mu, \nu=1}^N P_{\mu}^{*}(D)(q_{\mu\nu}P_{\nu}(D)u) \quad (u \in C_0^{\infty})$$

und

$$\text{IV)} \quad H_{2,0}u := P(D)u + \sum_{\mu=1}^N q_{\mu}P_{\mu}(D)(q_{\mu}^{*}u) \quad (u \in C_0^{\infty}),$$

wenn $q_{\mu\nu}$ bzw. $q_{\mu} \in C^{2m}$ und die beiden Operatoren durch Ausdifferenzieren in die Form II) gebracht werden. $H_{2,0}$ in IV) ist symmetrisch, ebenso in III), wenn $q_{\mu\nu} = q_{\nu\mu}^{*}$ ($1 \leq \mu, \nu \leq N$). Offensichtlich entspricht III) genau der Situation in I), wenn man $D(h_{2,0}) := D(H_{2,0})$ und $h_{2,0}(u, v) := \langle H_{2,0}u, v \rangle$ setzt.

Wenn $\mathcal{F}$ die Fouriertransformation und $\mathcal{F}^{*}$ die inverse Fouriertransformation bezeichnet, können mit $u, v \in C_0^{\infty}$ $P(D)u$, $h_1(u, v)$, $h_{2,0}(u, v)$ und $H_{2,0}u$ in I) und II) bekanntlich in der folgenden Weise dargestellt werden :

$$P(D)u = \mathcal{F}^{*}P(\cdot)\mathcal{F}u$$

$$h_1(u, v) = \langle (\text{sgn } P(\cdot)) |P(\cdot)|^{1/2} \mathcal{F}u, |P(\cdot)|^{1/2} \mathcal{F}v \rangle$$

$$h_{2,0}(u, v) = h_1(u, v) + \sum_{\mu, \nu=1}^N \langle q_{\mu\nu} \mathcal{F}^{*}P_{\nu}(\cdot) \mathcal{F}u, \mathcal{F}^{*}P_{\mu}(\cdot) \mathcal{F}v \rangle$$

$$H_{2,0}u = \mathcal{F}^{*}P(\cdot)\mathcal{F}u + \sum_{\mu=1}^N q_{\mu} \mathcal{F}^{*}P_{\mu}(\cdot)\mathcal{F}u$$

Entsprechendes trifft für III) und IV) zu.

Wir ersetzen jetzt die Polynome P , P_{μ} ($1 \leq \mu \leq N$) durch Funktionen $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ und $T_{\mu} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ ($1 \leq \mu \leq N$) und definieren entsprechend zu I) - IV) in den folgenden

Situationen (S 1) - (S 4) formale Sesqui- Linearformen

h_1 und h_2 , sowie formale Operatoren H_1 und H_2 :

$$(S\ 1) \quad \begin{aligned} h_1(u, v) &:= \langle \delta^* \text{sgn} T \delta (|\delta^* T|^{1/2} \delta u), |\delta^* T|^{1/2} \delta v \rangle \\ h_2(u, v) &:= h_1(u, v) + \sum_{\mu, \nu=1}^N \langle q_{\mu\nu} \delta^* T_\nu \delta u, \delta^* T_\mu \delta v \rangle \end{aligned}$$

$$(S\ 2) \quad \begin{aligned} H_1 u &:= \delta^* T \delta u \\ H_2 u &:= H_1 u + \sum_{\mu=1}^N q_\mu \delta^* T_\mu \delta u \end{aligned}$$

$$(S\ 3) \quad \begin{aligned} H_1 u &:= \delta^* T \delta u \\ H_2 u &:= H_1 u + \sum_{\mu, \nu=1}^N \delta^* T_\mu^* \delta (q_{\mu\nu} \delta^* T_\nu \delta u) \end{aligned}$$

$$(S\ 4) \quad \begin{aligned} H_1 u &:= \delta^* T \delta u \\ H_2 u &:= H_1 u + \sum_{\mu=1}^N q_\mu \delta^* T_\mu \delta (q_\mu^* u) . \end{aligned}$$

Das Ziel dieser Arbeit ist es, Voraussetzungen für T , T_μ , $q_{\mu\nu}$ und q_μ anzugeben, mit denen durch diese formalen Definitionen selbstadjungierte Operatoren H_1 und H_2 festgelegt werden und bezüglich H_1 und H_2 die folgenden Probleme der mathematischen Streutheorie gelöst werden können :

- 1) Beschreibung von $H_{1,ac}$ und $H_{2,ac}$ durch Lokalisierung des singulären Spektrums von H_1 und H_2 .
- 2) Existenz und Vollständigkeit der Wellenoperatoren bezüglich H_1 und H_2 .
- 3) Invarianzeigenschaften der Wellenoperatoren.

Für $\alpha > 0$ sei

$$w_{\alpha}(x) := \begin{cases} |x|^{\alpha-n} & , 0 < \alpha < n \\ 1 - \log|x| & , \alpha = n \\ 1 & , \alpha > n \end{cases} \quad (x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0)$$

und mit $\sigma > 0$, $q \in L^2_{loc}$ sei

$$N_{\alpha, \sigma}(q)(y) := \int_{|x-y| \leq \sigma} |q(x)|^2 w_{\alpha}(x-y) dx \quad (y \in \mathbb{R}^n)$$

und

$$N_{\alpha, \sigma}(q) := \sup_{y \in \mathbb{R}^n} N_{\alpha, \sigma}(q)(y), \quad N_{\alpha}(q) := N_{\alpha, 1}(q);$$

ferner sei

$$M_{\alpha}(q)(y) := \int_{|x-y| \leq 1} |q(x)|^2 |x-y|^{\alpha-n} dx \quad (y \in \mathbb{R}^n),$$

$$M_{\alpha}(q) := \sup_{y \in \mathbb{R}^n} M_{\alpha}(q)(y).$$

Dann bezeichne

$$N_{\alpha} := \{q \in L^2_{loc} ; N_{\alpha}(q) < \infty\}$$

$$M_{\alpha} := \{q \in L^1_{loc} ; M_{\alpha}(q) < \infty\}.$$

Es gilt (Vgl. [18], S.137) : $M_{\alpha} = N_{\alpha}$ ($\alpha \neq n$) und $N_n \subset M_n$.

Wir sagen, daß $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ mit einer positiven Zahl r und positiven Konstanten c_1, c_2, c_3 der Bedingung [T] genügt, wenn:

[T]₁ T ist stetig und es gilt

$$(1.7) \quad c_1(1+|x|^2)^{r/2} - c_3 \leq T(x) \leq c_2(1+|x|^2)^{r/2} \quad (x \in \mathbb{R}^n)$$

[T]₂ Es gibt eine abgeschlossene L - Nullmenge $Z \subset \mathbb{R}^n$,

so daß $T(Z)$ eine L - Nullmenge in $\mathbb{R}$ ist; mit
 $k_n := \max\{n, 3\}$ ist $T|_{\mathbb{R}^n \setminus Z}$ k_n -mal stetig
 differenzierbar.

Wenn T der Bedingung $[T]$ genügt, sei

$$(1.8) \quad \wedge := \{ \lambda \in \mathbb{R} ; \exists x \in \mathbb{R}^n \setminus Z : \lambda = T(x), \text{grad } T(x) = 0 \} \cup T(Z).$$

Für T , T_μ , $q_{\mu\nu}$, q_μ gelten in der jeweiligen Situation

(S 1) - (S 4) die folgenden Voraussetzungen :

[S 1]

I) Die Funktion T genügt mit einer positiven Zahl r
 und positiven Konstanten C_1, C_2, C_3 der Bedingung $[T]$.

II)a) Die Funktion T_μ ($1 \leq \mu \leq N$) ist L -meßbar; mit einer
 Zahl $s_\mu \in [0, r/2]$ gilt $(1 + |\cdot|^2)^{-s_\mu/2} T_\mu \in L^\infty$.

b) $T_\mu|_{\mathbb{R}^n \setminus T^{-1}(\wedge)}$ ist lokal hölderstetig ($1 \leq \mu \leq N$).

III) Für $q_{\mu\nu}$ ($1 \leq \mu, \nu \leq N$) gilt :

a) $q_{\mu\nu} = q_{\nu\mu}^*$

b) Es gibt L -meßbare Funktionen $g_{\mu\nu}, h_{\mu\nu} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$,
 so daß $q_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} h_{\mu\nu}$ und $g_{\mu\nu}$ und $h_{\mu\nu}$ haben die folgen-
 den Eigenschaften :

1) Falls $s_\mu = s_\nu = r/2$, ist $g_{\mu\nu}, h_{\mu\nu} \in L^\infty$ und mit
 $t_\mu := \max\{1, \|(1 + |\cdot|^2)^{-s_\mu/2} T_\mu\|_\infty\}$ ($1 \leq \mu \leq N$) gilt

$$(1.9) \quad \sum_{s_\mu = s_\nu = r/2} t_\mu t_\nu \|g_{\mu\nu}\|_\infty \|h_{\mu\nu}\|_\infty =: C_0 < C_1.$$

2) Falls $s_\mu = r/2$, $s_\nu < r/2$, ist $g_{\mu\nu} \in L^\infty$ und

$h_{\mu\nu} \in N_2(r/2 - s_\nu)$ mit $\lim_{\sigma \rightarrow 0+} N_2(r/2 - s_\nu), \sigma(h_{\mu\nu}) = 0$,
falls $2(r/2 - s_\nu) \leq n$.

3) Falls $s_\mu < r/2, s_\nu = r/2$, ist $h_{\mu\nu} \in L^\infty$ und

$g_{\mu\nu} \in N_2(r/2 - s_\mu)$ mit $\lim_{\sigma \rightarrow 0+} N_2(r/2 - s_\mu), \sigma(g_{\mu\nu}) = 0$,
falls $2(r/2 - s_\mu) \leq n$.

4) Falls $s_\mu, s_\nu < r/2$, ist $g_{\mu\nu} \in N_2(r/2 - s_\mu), h_{\mu\nu} \in N_2(r/2 - s_\nu)$
mit $\lim_{\sigma \rightarrow 0+} N_2(r/2 - s_\mu), \sigma(g_{\mu\nu}) = 0$, falls $2(r/2 - s_\mu) \leq n$
oder $\lim_{\sigma \rightarrow 0+} N_2(r/2 - s_\nu), \sigma(h_{\mu\nu}) = 0$, falls $2(r/2 - s_\nu) \leq n$.

5) Es gibt ein $\delta \in \mathbb{R}_+$ mit $1 < \delta \leq 2$, so daß

$$\sup_{y \in \mathbb{R}^n} \int_{|x-y| \leq \delta} (|g_{\mu\nu}(x)|^2 + |h_{\mu\nu}(x)|^2) dx < \infty.$$

(1.10) Bemerkung

Wenn in [S 1] $r/2 = m \in \mathbb{N}$ und $T(x) = \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq m} c_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta$
mit $c_{\alpha\beta} = c_{\beta\alpha}^*$ ($|\alpha|, |\beta| \leq m$) ein reelles Polynom der Ord-
nung $2m$ mit konstanten Koeffizienten ist und, falls $s_\mu = m$,
 $T_\mu(x) = \sum_{|\alpha| \leq m} c_{\mu, \alpha} x^\alpha$ ein Polynom der Ordnung m mit kon-
stanten Koeffizienten ist, kann [S 1] III.b.1 ersetzt wer-
den durch

[S 1] III.b.1'

Falls $s_\mu = s_\nu = m$, ist $g_{\mu\nu}, h_{\mu\nu} \in L^\infty$, $q_{\mu\nu}$ ist gleichmäßig
stetig und es gilt

$$(1.11) \quad \sum_{|\alpha| = |\beta| = m} c_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta \\ + \sum_{s_\mu = s_\nu = m} q_{\mu\nu}(y) \left(\sum_{|\alpha| = m} c_{\nu, \alpha} x^\alpha \right) \left(\sum_{|\beta| = m} c_{\mu, \beta}^* x^\beta \right) \\ \geq c_1^* (1 + |x|^2)^m - c_2^* \quad (x, y \in \mathbb{R}^n)$$

mit positiven Konstanten C_1', C_3' .

[S 1]'

I) Wie [S 1] I

II)a) Wie [S 1] II.a, zusätzlich ist $T_\mu \in H_{loc}^{1,2}$ ($1 \leq \mu \leq N$).

b) Es gibt ein β , $1/2 < \beta \leq 1$, so daß $T_\mu|_{\mathbb{R}^n \setminus \bar{T}}(\wedge)$ lokal hölderstetig ist mit Hölderexponent β ($1 \leq \mu \leq N$).

III) Wie [S 1] III, jedoch in III.b zusätzlich :

Falls $s_\mu = r/2$, ist $(1 + |\cdot|^2)^{\delta/4} g_{\mu\nu} \in L^\infty$

Falls $s_\mu < r/2$, ist $(1 + |\cdot|^2)^{\delta/4} g_{\mu\nu} \in N_{2(r/2 - s_\mu)}$.

[S 2]

I) Die Funktion T genügt mit einer positiven Zahl r und positiven Konstanten C_1'', C_2'', C_3'' der Bedingung [T].

II)a) Die Funktion T_μ ($1 \leq \mu \leq N$) ist L -meßbar; mit einer Zahl $s_\mu \in [0, r]$ ist $(1 + |\cdot|^2)^{-s_\mu/2} T_\mu \in L^\infty$.

b) $T_\mu|_{\mathbb{R}^n \setminus \bar{T}}(\wedge)$ ist lokal hölderstetig ($1 \leq \mu \leq N$).

III) Für q_μ ($1 \leq \mu \leq N$) gilt :

Es gibt L -meßbare Funktionen $g_\mu, h_\mu : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$, so daß $q_\mu = g_\mu h_\mu$. g_μ und h_μ haben die folgenden Eigenschaften

1) $g_\mu \in L^\infty$

2) Falls $s_\mu = r$, ist $h_\mu \in L^\infty$ und mit

$t_\mu := \max \{1, \|(1 + |\cdot|^2)^{-s_\mu/2} T_\mu\|_\infty\}$ ($1 \leq \mu \leq N$) gilt

$$(1.12) \quad \sum_{s_\mu=r} t_\mu \|q_\mu\|_\infty \leq C_0' < 2^{-1/2} C_1''$$

3) Falls $s_\mu < r$, ist $h_\mu \in N_2(r-s_\mu)$ mit
 $\lim_{s \rightarrow 0+} N_2(r-s_\mu), \sigma(h_\mu) = 0$, falls $2(r-s_\mu) \leq n$.

4) Es gibt ein $\delta \in \mathbb{R}_+$ mit $1 < \delta \leq 2$, so daß

$$\sup_{y \in \mathbb{R}^n} \int_{|x-y| \leq 1} (1+|x|^2)^{\delta/2} (|g_\mu(x)|^2 + |h_\mu(x)|^2) dx < \infty.$$

IV) Für T_μ und q_μ ($1 \leq \mu \leq N$) gilt

$$(1.13) \quad \sum_{\mu=1}^N \langle q_\mu \delta^* T_\mu f u, v \rangle = \sum_{\mu=1}^N \langle u, q_\mu \delta^* T_\mu f v \rangle \quad (u, v \in C_0^\infty).$$

[S 2],

I) Wie [S 2] I

II)a) Wie [S 2] II.a; zusätzlich ist $T_\mu \in H_{loc}^{1, \infty}$ ($1 \leq \mu \leq N$).

b) Wie [S 2] II.b

III) Wie [S 2] III; zusätzlich gilt :

Falls $s_\mu = r$, ist $(1 + |\cdot|^2)^{\delta/4} h_\mu \in L^\infty$

Falls $s_\mu < r$, ist $(1 + |\cdot|^2)^{\delta/4} h_\mu \in N_2(r-s_\mu)$

IV) Wie [S 2] IV

[S 3]

I) Wie [S 1] I

II) Wie [S 1] II

III) Für q_μ , ($1 \leq \mu \leq N$) gilt :

a) Mit $s := \min\{k \in \mathbb{N}; k \geq r/2\}$ ist

$$q_{\alpha\beta} \in C_B^s := \{u \in C^s; D^\alpha u \in L^\infty, |\alpha| \leq s\}.$$

Wenn $H^{s,2} := \{u \in L^2; D^\alpha u \in L^2, |\alpha| \leq s\}$, versehen mit der Norm $\|u\|_{s,2} := \|(1+|\cdot|^2)^{s/2} \mathcal{F}u\|$, der Sobolev-Raum der Ordnung s ist, folgt damit die Existenz von Konstanten $C_{\mu\nu}$ bzw. $C'_{\mu\nu}$, so daß

$$\begin{aligned} q_{\mu\nu} u \in H^{s,2}, \quad \|q_{\mu\nu} u\|_{s,2} &\leq C_{\mu\nu} \|u\|_{s,2} & (u \in C_0^\infty) \\ q_{\mu\nu} u &\in L^2, \quad \|q_{\mu\nu} u\| < C'_{\mu\nu} \|u\| & (u \in L^2). \end{aligned}$$

Mit $\Theta_0 := r/2s \in (0,1]$ gilt dann für diese Konstanten

$$(1.14) \quad \sum_{\mu,\nu=1}^N t_\mu t_\nu C_{\mu\nu}^{\Theta_0} C_{\mu\nu}'^{1-\Theta_0} =: C_0''' < 2^{-1/2} C_1, \quad$$

wenn t_μ wie in [S 1] III definiert sind.

b) Wie [S 1] III.a

c) Wie [S 1] III.b, jedoch ohne die Bedingung (1.9).

[S 3]'

I) Wie [S 1]' I

II) Wie [S 1]' II

III) Wie [S 3] III.a und [S 1]' III, jedoch ohne die Bedingung (1.9).

[S 4]

I) Die Funktion T genügt mit einer positiven Zahl $r = 2m$ ($m \in \mathbb{N}$) und positiven Konstanten C_1''', C_2''', C_3''' der Bedingung [T].

II) Mit einer Zahl $s_\mu \in [0, 2m]$ ist $(1+|\cdot|^2)^{-s_\mu/2} T_\mu \in C_B^1$ ($1 \leq \mu \leq N$).

III) Für q_μ ($1 \leq \mu \leq N$) gilt :

a) $q_\mu \in C_B^{2m}$

b) 1) Falls $s_\mu = 2m$ ist mit einem $\delta \in \mathbb{R}_+$, $1 < \delta \leq 2$,
 $(1 + |\cdot|^2)^{\delta/2} q_\mu \in L^\infty$.

Weil $q_\mu \in C_B^{2m}$, erhält man wie zuvor positive Konstanten C_μ , C'_μ , so daß

$$q_\mu u \in L^2, \quad \|q_\mu u\| \leq C'_\mu \|u\| \quad (u \in L^2).$$

Für diese Konstanten gilt dann

$$(1.15) \quad \sum_{s_\mu = 2m} t_\mu C_\mu C'_\mu =: C_0''' < 2^{-1/2} C_1''',$$

wobei $t_\mu := \max\{1, \|(1 + |\cdot|^2)^{-s_\mu/2} T_\mu\|_\infty\}$ ($1 \leq \mu \leq N$).

2) Falls $s_\mu < 2m$, gibt es ein ε mit $0 < \varepsilon < (2m - s_\mu)$ und ein $\delta \in \mathbb{R}_+$, $1 < \delta \leq 2$, so daß $(1 + |\cdot|^2)^{\delta/2} q_\mu \in N_{2(2m - s_\mu - \varepsilon)}$.

Die unter den angegebenen Voraussetzungen möglichen Aussagen werden nur für die Situation (S 1) ausführlich formuliert, weil sie sich in (S 2) - (S 4) weitgehend wiederholen. Dort wird dann in der notwendigen Weise auf (S 1) verwiesen.

(1.16) Theorem

Gelten in der Situation (S 1) für $T, T_\mu, q_{\mu\nu}$ ($1 \leq \mu, \nu \leq N$) die Voraussetzungen [S 1], folgt :

1) Sei $H^{r,2} := \{u \in L^2; (1+|\cdot|^2)^{r/2} f u \in L^2\}$ der Sobolev-raum der Ordnung r mit der Norm $\|u\|_{r,2} := \|(1+|\cdot|^2)^{r/2} f u\|$.

Dann ist mit

$$D(H_1) := H^{r,2}, \quad H_1 u := f^* T f u \quad (u \in H^{r,2})$$

H_1 ein selbstadjungierter Operator in L^2 und es gilt :

$$a) \quad \sigma(H_1) = \sigma_w(H_1) = \{T(x); x \in \mathbb{R}^n\} = [\lambda_{\min}, \infty),$$

wobei $\lambda_{\min} := \inf_{x \in \mathbb{R}^n} T(x)$.

b) Λ ist eine abgeschlossene L - Nullmenge, $[\lambda_{\min}, \infty) \setminus \Lambda$ ist offen und

$$H_{1,ac} = E_1([\lambda_{\min}, \infty) \setminus \Lambda) L^2.$$

Insbesondere ist H_1 in $[\lambda_{\min}, \infty) \setminus \Lambda$ absolutstetig mit $\sigma_s(H_1) \subset \Lambda$.

c) H_1 ist nach unten beschränkt. Die auf $D(h_{1,0}) := D(H_1)$ mit $h_{1,0}(u,v) := \langle H_1 u, v \rangle$ definierte Sesqui- Linearform $h_{1,0}$ ist symmetrisch, nach unten beschränkt und abschließbar. Für ihre Abschließung h_1 gilt

$$D(h_1) = D(|H_1|^{1/2}) = H^{r/2,2}$$

$$h_1(u,v) = \langle (\operatorname{sgn} H_1) |H_1|^{1/2} u, |H_1|^{1/2} v \rangle \quad (u, v \in H^{r/2,2}).$$

Der zu h_1 gehörende Operator H_{h_1} ist gleich H_1 .

2) Mit $D(h_2) := H^{r/2,2}$ und

$$h_2(u, v) := h_1(u, v) + \sum_{\mu, \nu=1}^N (k_{\mu, \nu}^* \cdot \langle u, e_{\mu}^* \rangle \langle e_{\nu}^*, v \rangle) \quad (u, v \in H^{r/2,2})$$

ist h_2 eine symmetrische, abgeschlossene, nach unten beschränkte Sesqui-Linearform. Für den zu h_2 gehörenden selbstadjungierten Operator $H_{h_2} =: H_2$ gilt:

a) $D(H_2) \subset D(h_2)$, $h_2(u, v) = \langle H_2 u, v \rangle$ ($u \in D(H_2)$, $v \in D(h_2)$).

b) $D(H_2)$ ist ein Core ¹⁾ von h_2 .

c) Ist $u \in D(h_2)$, $w \in L^2$ und gilt $h_2(u, v) = \langle w, v \rangle$ für alle Elemente eines Core von h_2 , ist $u \in D(H_2)$ und $w = H_2 u$.

d) H_2 ist nach unten beschränkt und es gilt

$$D(|H_2|^{1/2}) = D(|H_1|^{1/2}) = H^{r/2,2}$$

$$h_2(u, v) = \langle (\text{sgn } H_2) |H_2|^{1/2} u, |H_2|^{1/2} v \rangle \quad (u, v \in H^{r/2,2}).$$

e) $\zeta_w(H_2) = \zeta_w(H_1)$.

3) Es gibt eine bzgl. $[\lambda_{\min}, \infty) \setminus \Lambda$ abgeschlossene L-Nullmenge $e \in [\lambda_{\min}, \infty) \setminus \Lambda$, so daß

$$H_{2,ac} = E_2([\lambda_{\min}, \infty) \setminus (\Lambda \cup e)) L^2.$$

Inbesondere ist H_2 in $[\lambda_{\min}, \infty) \setminus (\Lambda \cup e)$ absolutstetig und $\zeta_s(H_2) \cap ([\lambda_{\min}, \infty) \setminus \Lambda) = \emptyset$.

4) Die Wellenoperatoren

$$W_{\pm} := W_{\pm}(H_2, H_1) := s\text{-}\lim_{t \rightarrow \pm\infty} e^{itH_2} e^{-itH_1} P_{1,ac}$$

¹⁾ vgl. [9], S. 317.

existieren und sind vollständig, das heißt, $W_{\pm}$ ist eine partielle Isometrie mit Anfangsbereich $H_{1,ac}$, Endbereich $H_{2,ac}$ und es gilt

$$W_{\pm} u \in D(H_2) \quad , \quad H_2 W_{\pm} u = W_{\pm} H_1 u \quad (u \in D(H_1)).$$

Der Operator $S := S(H_2, H_1) := W_{+}^{*} W_{-}$ ist ein unitärer Operator in $H_{1,ac}$ und kommutiert mit H_1 .

5) Wenn $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Borel-meßbare Funktion ist, so daß für jede Funktion $f \in L^2([\lambda_{\min}, \infty))$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \left| \int_{[\lambda_{\min}, \infty)} f(\lambda) e^{-it\phi(\lambda) - is\lambda} d\lambda \right|^2 ds = 0,$$

existiert und ist

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} e^{it\phi(H_2)} e^{-it\phi(H_1)} P_{1,ac} u = W_{\pm} u \quad (u \in L^2) .$$

(1.17) Theorem

Gelten in der Situation (S 1) für $T, T_{\mu}, q_{\mu\nu}$ ($1 \leq \mu, \nu \leq N$) die Voraussetzungen [S 1]', folgt :

Über die Aussagen 1) - 5) von Theorem 1.16 hinaus gilt :

6) Für jedes kompakte Intervall $I' \subset [\lambda_{\min}, \infty) \setminus \Lambda$ ist $E_2(I' \cap e)$ eine endlich-dimensionale Projektion.

$\sigma_s(H_2) \cap ([\lambda_{\min}, \infty) \setminus \Lambda)$, das singuläre Spektrum von H_2 in $[\lambda_{\min}, \infty) \setminus \Lambda$, besteht, falls nichtleer, aus Eigenwerten von H_2 mit endlicher Vielfachheit, die in $[\lambda_{\min}, \infty) \setminus \Lambda$ keine Häufungspunkte haben.

(1.18) Folgerung aus Theorem 1.16 und 1.17

I) Gelten in der Situation (S 3) für $T, T_{\mu}, q_{\mu\nu}$ ($1 \leq \mu, \nu \leq N$) die Voraussetzungen [S 3], folgt :

1) Es gelten die gleichen Aussagen wie in Theorem 1.16.

2) Mit

$$D(V) := H^{r,2}$$

$$Vu := \sum_{\nu=1}^N f^* T_{\mu}^* f(q_{\mu\nu} f^* T_{\nu} f u) \quad (u \in H^{r,2}),$$

ist V symmetrisch und H_1 -beschränkt mit einer H_1 -Schranke $c < 1$. Der infolgedessen selbstadjungierte Operator $\tilde{H}_2$, mit

$$D(\tilde{H}_2) := H^{r,2}, \quad \tilde{H}_2 := H_1 + V,$$

ist gleich H_2 .

II) Gelten in der Situation (S 3) für $T, T_{\mu}, q_{\mu\nu}$ ($1 \leq \mu, \nu \leq N$) die Voraussetzungen [S 3]', folgt :

Es gelten die gleichen Aussagen wie in Theorem 1.17 und in

1.18.

(1.19) Theorem

I) Mit den Voraussetzungen [S 2] für $T, T_{\mu}, q_{\mu\nu}$ ($1 \leq \mu \leq N$) erhält man in der Situation (S 2) :

1) Es gelten die gleichen Aussagen wie in Theorem 1.16.1.

2) Mit

$$D(V) := H^{r,c}$$

$$Vu := \sum_{\mu=1}^N q_{\mu\mu} f^* \dots f u \quad (u \in H^{r,c})$$

ist V symmetrisch und H_1 -beschränkt mit einer H_1 -Schranke $c < 1$. Für den selbstadjungierten Operator H_2 , mit

$$D(H_2) := H^{r,2}, \quad H_2 := H_1 + V,$$

ist $\epsilon_w(H_1) = \epsilon_w(H_2)$.

3) Bezüglich H_1 und H_2 gelten die gleichen Aussagen wie in Theorem 1.16, 3 - 5.

II) Mit den Voraussetzungen [S 2]' für T, T_μ, q_μ ($1 \leq \mu \leq N$) erhält man in der Situation (S 2) neben I) zusätzlich die Aussage in Theorem 1.17.6.

(1.20) Theorem

Mit den Voraussetzungen [S 4] für T, T_μ, q_μ ($1 \leq \mu \leq N$) erhält man in der Situation (S 4) :

1) Es gelten die gleichen Aussagen wie in Theorem 1.16.1, wobei $r = 2m$.

2) Mit

$$D(V) := H^{2m,2}$$

$$Vu := \sum_{\mu=1}^N q_\mu f^* T_\mu f(q_\mu^* u) \quad (u \in H^{2m,2}),$$

ist V symmetrisch und H_1 -beschränkt mit einer H_1 -Schranke $c < 1$. Für den selbstadjungierten Operator H_2 , mit

$$D(H_2) := H^{2m,2}, \quad H_2 := H_1 + V,$$

ist $\epsilon_w(H_1) = \epsilon_w(H_2)$.

3) Bezüglich H_1 und H_2 gelten die gleichen Aussagen wie in Theorem 1.16, 3 - 5.

Zum Beweis für die voranstehenden Ergebnisse wird die sogenannte stationäre Methode angewandt, wie sie in der Arbeit von S.T. Kuroda ([10]) und, etwas modifiziert, in der Arbeit von M. Schechter ([19]) zu finden ist.

Die Beschreibung dieser Methode und die sich daraus für Theorem 1.16 - 1.20 ergebenden Beweisschritte sind in §3 enthalten. Die Beweise selbst sind in den §§ 4 - 8 zu finden. In §2 werden einige Bemerkungen zum Vergleich mit bekannten Resultaten gemacht.

An dieser Stelle möchte ich allen danken, die es mir ermöglicht haben, diese Arbeit anzufertigen, insbesondere meinem unerwartet verstorbenen Lehrer, Herrn Prof.Dr.K. Jörgens für die Anregung und das stete Interesse an ihrem Fortgang. In der gleichen Weise gilt mein Dank Herrn Prof.Dr.J. Weidmann für seine Unterstützung während der Abwesenheit von Herrn Prof.Dr.K. Jörgens.

§ 2 Einige vergleichende Bemerkungen

Aufgrund der an die Funktionen T und T_μ ($1 \leq \mu \leq N$) gestellten Bedingungen und der einleitenden Bemerkungen in § 1 sieht man sofort, in welcher Weise sich die in § 1, I - IV, beschriebenen partiellen Differentialoperatoren in (S 1) - (S 4) einordnen, da für die Polynome P und P_μ ($1 \leq \mu \leq N$) jeweils mit $r = 2m$ und $s_\mu = m_\mu$ die Voraussetzungen [S 1], I, II - [S 4], I, II zutreffen.

An einem einfachen, von P und P_μ abgeleiteten Beispiel sieht man, daß die durch (S 1) - (S 4) gegebenen Operatoren eine Erweiterung dieser Differentialoperatoren bilden:

Mit $\sigma > 0$ sei

$$T(x) := |P(x)|^\sigma, \quad T_\mu(x) := |P_\mu(x)|^\sigma \quad (x \in \mathbb{R}^n, 1 \leq \mu \leq N);$$

dann erfüllt T die Bedingung [T] mit $r = 2m\sigma$ und positiven Konstanten c_1, c_2, c_3 (vgl. (1.5)), denn

$Z := \{x \in \mathbb{R}^n; P(x) = 0\}$ ist eine abgeschlossene L - Nullmenge, deren Bild unter T eine L - Nullmenge in $\mathbb{R}$ ist

und $T|_{\mathbb{R}^n \setminus Z}$ ist beliebig differenzierbar. Für die Funktionen T_μ gilt offenbar

$$(1 + |\cdot|^{2\sigma m_\mu/2}) T_\mu \in L^\infty \quad (1 \leq \mu \leq N)$$

und T_μ ist in $\mathbb{R}^n$ lokal hölderstetig mit Hölderexponent $\Theta = \min\{\sigma, 1\}$.

Sei H der durch P definierte selbstadjungierte Operator.
Dann ist

$$D(H_1) = D(|H|^{\sigma}) \quad , \quad H_1 = |H|^{\sigma}$$

und H_1 ist, wenn $\sigma \notin \mathbb{N}$, kein Differentialoperator. Entsprechendes gilt für H_2 .

Gilt in [S 2] I und [S 4] I sogar, daß

$$(2.1) \quad T|_{\mathbb{R}^n \setminus Z} \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n \setminus Z), \quad \text{grad} T(x) \neq 0 \quad (x \in \mathbb{R}^n \setminus Z);$$

in [S 2] II, daß

$$(2.2) \quad (1 + |\cdot|^2)^{-s_{\mu}/2} T_{\mu} \in C_B^1 \quad (1 \leq \mu \leq N)$$

in [S 2] III, daß

$$(2.3) \quad \begin{cases} (1 + |\cdot|^2)^{\delta/2} h_{\mu} \in L^{\infty}, & \text{falls } s_{\mu} = r, \\ \text{Es gibt ein } \varepsilon, 0 < \varepsilon < r - s_{\mu}, & \text{falls } s_{\mu} < r, \text{ so daß} \\ (1 + |\cdot|^2)^{\varepsilon/2} h_{\mu} \in L^{\infty}(r - s_{\mu} - \varepsilon), \end{cases}$$

gehören die aus Theorem 1.19 und 1.20 resultierenden Operatoren H_1 und H_2 zu einer Klasse von Operatoren, für die J. Weidmann und K. Veselić ([23], Theorem 3.1 b) Bedingungen angegeben haben, aus denen die Existenz der Wellenoperatoren folgt :

(2.4) Satz

Sei $Z \subset \mathbb{R}^n$ eine abgeschlossene L - Nullmenge und $h \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n \setminus Z)$ eine reelle Funktion mit

$$\text{grad } h(x) \neq 0 \quad (x \in \mathbb{R}^n \setminus Z)$$

$$\text{rang}(\partial_j \partial_k h(x)) \geq 1 \quad (x \in \mathbb{R}^n \setminus Z, 1 \leq j, k \leq n \text{ geeignet}).$$

Dann sei $H_{(h)}$ der selbstadjungierte Operator, der durch

$$D(H_{(h)}) := \{u \in L^2; h \nabla u \in L^2\}$$

$$H_{(h)}u := \nabla^* h \nabla u \quad (u \in D(H_{(h)}))$$

definiert ist. Ist V ein symmetrischer Operator mit $S \subset D(V)$ ¹⁾ und hat $H_{(h)} + V$ selbstadjungierte Fortsetzungen H , existieren die Wellenoperatoren

$$W_{\pm}(H, H_{(h)}) = s\text{-}\lim_{t \rightarrow \pm\infty} e^{itH} e^{-itH_{(h)}} \quad 2)$$

für jede dieser Fortsetzungen H , wenn V folgende Bedingung erfüllt :

Es gibt ein $p \in [2, \infty]$, $\theta \in \mathbb{R}$ und ein Polynom $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$, so daß

$$\min\{0, (1-2/p)1/2 - 1\} > \theta$$

und

$$\|Vu\| \leq (1+t)^{\theta} \|H_{(f)}u\|,$$

wenn $u \in S$ mit $\text{supp } u \subset \{x \in \mathbb{R}^n; |x| \geq t\}$ ($t \geq 0$).

Aus [S 2]I und [S 4]I sieht man, daß H_1 aus Theorem 1.19 und Theorem 1.20 der Operator $H_{(h)}$ mit $h := T$ ist, wenn (2.1) gilt.

¹⁾ $S := S(\mathbb{R}^n) := \{u \in C^\infty; (1+|\cdot|^2)^{\frac{\sigma}{2}} D^\alpha u \in L^\infty, \sigma \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{N}_0^n\}$

²⁾ Da $\text{grad } h(x) \neq 0$ ($x \in \mathbb{R}^n \setminus Z$), ist $H_{(h)}$ absolutstetig (§ 4).

Ferner gilt dort $S \subset D(V) = H^{r,2}$ (bzw. $H^{2m,2}$) und $H_2 = H_1 + V$ ist die selbstadjungierte Fortsetzung von $H_1 + V|_S$.

In (S 2) sei $k \in \mathbb{N}$ so gewählt, daß $2k \gg r$; in (S 4) sei $k = m$. Dann ist $f := (1 + |\cdot|^2)^k$ ein Polynom. Falls in [S 2] zusätzlich (2.2) und (2.3) gelten, wird in § 8, Bemerkung 8.11 gezeigt, daß mit einer Konstanten $c_{k,V}$ für V

$$(2.5) \quad \|Vu\| \leq c_{k,V} \|(1 + |\cdot|^2)^{-\delta/2} H_{(f)} u\| \quad (u \in S).$$

Weil $H_{(f)}$ wegen der Wahl von f für $u \in S$ ein Differentialoperator ist, folgt aus (2.5), daß

$$\|Vu\| \leq c'_{k,V} (1+t)^{-\delta} \|H_{(f)} u\| ,$$

wenn $u \in S$ mit $\text{supp } u \subset \{x \in \mathbb{R}^n; |x| \geq t\}$ ($t \geq 0$). Da $-\delta < -1$, erfüllt V mit $p := 2$ und $l := 0$ die Bedingung aus Satz 2.4; wenn also die Zusatzbedingungen (2.1)–(2.3) erfüllt sind, erhält man mit H_1 und H_2 aus Theorem 1.19 und 1.20 in der Situation von Satz 2.4 ein Beispiel zweier selbstadjungierter Operatoren $H_{(h)}$ und H , für die die Wellenoperatoren existieren und vollständig sind.

Falls T ein reelles Polynom der Ordnung $2m$ ist, das der Bedingung (1.5) genügt und T_μ ($1 \leq \mu \leq N$) Polynome der Ordnung $m_\mu \leq m$ (bzw. $m_\mu \leq 2m$) sind, wurden von verschiedenen Autoren Bedingungen an die Funktionen $q_{\alpha,V}$ (bzw. q_α) gestellt, um Resultate wie in Theorem 1.16 – 1.20 zu erhalten.

S.T. Kuroda ([11]) verlangt in der Situation I, um das Ergebnis von Theorem 1.17 zu erhalten :

$$1) \quad c_{\alpha\beta} = c_{\beta\alpha}^* \quad (|\alpha|, |\beta| \leq m)$$

$$q_{\mu\nu} = q_{\nu\mu}^* \quad (1 \leq \mu, \nu \leq N)$$

2) $q_{\mu\nu} \in L^\infty$; wenn $m_\mu = m_\nu = m$, ist $q_{\mu\nu}$ gleichmäßig stetig und es gilt die Beziehung (1.11) wie in Bemerkung (1.10).

3) Mit einem $\delta \in \mathbb{R}, \delta > 1$, ist $(1 + |\cdot|^2)^{\delta/2} q_{\mu\nu} \in L^\infty$ ($1 \leq \mu, \nu \leq N$).

Setzt man $g_{\mu\nu} := (1 + |\cdot|^2)^{-\delta/4}$, $h_{\mu\nu} := (1 + |\cdot|^2)^{\delta/4} q_{\mu\nu}$, sind bis auf [S 1]', III.b.1, (1.9) alle Bedingungen von [S 1]' erfüllt. (1.9) ist mit der obigen Bedingung 2) nicht vergleichbar, kann jedoch, wie die Bemerkung 1.10 zeigt, durch diese ersetzt werden, so daß die Voraussetzungen für Theorem 1.17 zutreffen.

M. Schechter ([19]) betrachtet in der Situation I nur Polynome P_μ der Ordnung $m_\mu < m$, weshalb Bedingungen wie (1.9) oder (1.11) nicht notwendig sind.

Mit

$$\Lambda := \{ \lambda \in \mathbb{R}; \exists x \in \mathbb{R}^n, P(x) = \lambda, \text{grad } P(x) = 0 \}$$

sei

$$K_\lambda(x) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int \frac{\varepsilon e^{ixy} dy}{|P(y) - \lambda| < 1} \frac{1}{(P(y) - \lambda)^2 + \varepsilon^2} \quad (x \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R} \setminus \Lambda).$$

Dann werden im Zusammenhang mit dieser Funktion K_λ Voraussetzungen für $q_{\mu\nu}$ angegeben. Ein Vergleich mit [S 1] ist nicht möglich, da K_λ im allgemeinen nicht bekannt ist.

Unter der einschränkenden Bedingung, daß

$$P(x) = t(|x|^2) \quad (x \in \mathbb{R}^n),$$

wobei t ein reelles Polynom in einer Variablen ist, wird die Funktion K_λ angegeben ([19], Theorem 2.5). Die Voraussetzungen für $q_{\mu\nu}$, um das Ergebnis von Theorem 1.16 zu erhalten, lauten dann :

$$\begin{aligned} 1) \quad c_{\alpha\beta} &= c_{\beta\alpha}^* \quad (|\alpha|, |\beta| \leq m)^{1)} \\ q_{\mu\nu} &= q_{\nu\mu}^* \quad (1 \leq \mu, \nu \leq N) \end{aligned}$$

2) Es gibt L -meßbare Funktionen $g_{\mu\nu}, h_{\mu\nu}$, so daß $q_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} h_{\mu\nu}$. Für die Funktionen $g_{\mu\nu}, h_{\mu\nu}$ gilt :

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} &\in N_{2(m-m_\mu)}, \quad h_{\mu\nu} \in N_{2(m-m_\nu)} \\ \lim_{|x| \rightarrow \infty} \int_{|x-y| \leq 1} |h_{\mu\nu}(y)|^2 dy &= 0 \quad (1 \leq \mu, \nu \leq N) \\ \lim_{\sigma \rightarrow 0^+} N_{2(m-m_\nu), \sigma}(h_{\mu\nu}) &= 0, \quad \text{falls } 2m - 2m_\nu \leq n. \end{aligned}$$

Ferner ist eine der beiden folgenden Bedingungen erfüllt :

3a) Es gibt ein $\beta, \beta < (n-1)/2$, so daß $(1 \leq \mu, \nu \leq N)$

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} \int_{|x-y| \leq 1} (|g_{\mu\nu}(y)|^2 + |h_{\mu\nu}(y)|^2) (1 + |x-y|)^{-\beta} dy < \infty \quad (2)$$

3b) Es gibt ein $\sigma > 0, \alpha \geq 0, p > 1$ mit

$$\alpha > 1 - \frac{2n}{(n+1)p},$$

1) genau : "P ist reell", was aber gleichbedeutend ist.

2) Bei Integration ohne Angabe des Integrationsbereiches ist dieser stets $\mathbb{R}^n$.

so daß mit

$$\hat{a}_{\mu\nu}(x) := (1+|x|^2)^{\alpha/2} \int_{|y-x|<\varepsilon} (|g_{\mu\nu}(y)|^2 + |h_{\mu\nu}(y)|^2) dy$$

$$\hat{a}_{\mu\nu} \in L^p \quad (1 \leq p < \infty).$$

($x \in \mathbb{R}^n$)

Für diese speziellen Polynome P ist, mit $p = \infty, 1, 2$) und 3b) genau [S 1]. Mit 3a) ist [S 1], III.5 nicht vergleichbar, wie man anhand eines einfachen Beispielles sieht :

Wenn $q := (1+|\cdot|^2)^{-1/2 - \varepsilon}$ ($\varepsilon > 0$), gilt [S 1], III.5 mit $g := h := (1+|\cdot|^2)^{-1/4 - \varepsilon/2}$; es gibt jedoch keine Zerlegung von q , so daß das Integral in 3a) existiert, wenn ε genügend klein ist.

Ein Beispiel für den umgekehrten Sachverhalt ist

$$q(x) := \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi(x-x_k),$$

wobei φ die charakteristische Funktion der Menge

$\{y \in \mathbb{R}^n; |y| \leq 1\}$, $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}^n$ mit $|x_k| = k^2$ und $(c_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}_+$ ist.

Wenn $c_k = k^{-1-\varepsilon}$ ($\varepsilon > 0$) gibt es eine Zerlegung von q , für die 3a) gilt, jedoch keine Zerlegung mit der Eigenschaft [S 1], III.5, wenn $\varepsilon \leq 1/2$.

Wenn $P(x) = x^2$ ($x \in \mathbb{R}^n$), also $H_1 = -\Delta$, $N = 1$ und $P_1 = 1$, werden verschiedene Bedingungen für $q = q_{11} = q_1$ angegeben.

Um das Ergebnis von Theorem 1.16 zu erhalten, verlangt

S.T. Kuroda (12) :

1) q ist reell, $|q|^{1/2} \in N_2$ und $\lim_{\epsilon \rightarrow 0+} N_{2,\epsilon}(|q|^{1/2}) = 0$.

2) Es gibt ein α und p , $1 < p \leq \infty$, so daß $\alpha > 1 - p^{-1}$ und

$$(1 + |\cdot|)^\alpha q \in L^p.$$

Bis auf [S 1], III.b.5 sind mit der Zerlegung von q in $q = ((\operatorname{sgn} q)|q|^{1/2})(|q|^{1/2})$ die Voraussetzungen in [S 1] erfüllt. 2) und [S 1], III.b.5 sind nicht vergleichbar, wenn auch aus 2) mit $\alpha, p > 1$ [S 1], III.b.5 mit $\delta = \alpha$ folgt.

Um das Ergebnis von Theorem 1.19, I zu erhalten, verlangt Alsholm/Schmidt von q (q reell) :

1) Für $h(x) := \int |q(y)| |x-y|^{(1-n)/2} dy \quad (x \in \mathbb{R}^n)$ gilt

$$h \in L^\infty \quad \text{und} \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} h(x) = 0.$$

2) Es gibt eine Zahl α , $0 < \alpha < 4$, so daß $q \in M_{4-\alpha}$.

3) Es gibt ein $\epsilon > 0$, so daß $(1 + |\cdot|)^{(2-n+\epsilon)/2} q \in L^2$.

Bis auf [S 2], III.4 sind die Voraussetzungen in [S 2] offenbar erfüllt. 1) und [S 2], III.4 sind nicht vergleichbar (Man vergleiche die Bemerkungen zu [19]).

Den Prototyp für die Bedingungen [S 1] - [S 4] bildet die von K.Jörgens, J.Weidmann, U.Greifenegger, M.Winkler ([8]) für q angegebene Bedingung, mit der man das Ergebnis von Theorem 1.19, I erhält :

q ist reell. Es gibt ein $\delta > 1$ und ein α mit $0 < \alpha < 4$, so daß

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1+|x|^2)^{\delta/2} \int_{|x-y| \leq 1} |q(y)|^2 |x-y|^{4-\alpha-n} dy < \infty.$$

Man verifiziert leicht, daß mit der Zerlegung von q in $q = (1+|\cdot|^2)^{-\delta/4} ((1+|\cdot|^2)^{\delta/4} q)$ die Voraussetzungen in [S 2]', also auch in [S 2] folgen. Das heißt, daß mit der obigen Voraussetzung für q sogar das Ergebnis aus Theorem 1.19, II folgt.

Man hat im letzten Fall gesehen, daß die Bedingung [S 2] IV einfach zu erfüllen ist, da $T_1 = 1$ und q reell ist. Wenn $N \geq 2$ und $T_2 \neq \text{const.}$, ist diese Bedingung nicht so überschaubar; bereits, wenn T_μ Polynome sind und erstreckt, wenn T_μ keine Polynome sind, da die zuvor prinzipiell mögliche Umformung von $\langle D^\alpha(q u), v \rangle$ ($\alpha \in \mathbb{N}_0^n$) in Ausdrücke der Form $\langle L^{\beta(q)} u, D^{\alpha''} v \rangle$, mittels derer man beim Nachweis von (1.13) vorzugehen pflegt, nicht mehr möglich ist. Das ist auch der Grund, weshalb die zuvor nur als Beispiel für II angeführten Fälle III und IV in § 1 übertragen in (S 3) und (S 4) besonders behandelt werden; denn es ist uns nicht gelungen, einen unbeschränkten Operator V zu finden, der in (S 2) die Bedingung [S 2] IV erfüllt, falls T_μ keine Polynome sind.

§ 3 Die stationäre Methode

Einige Bezeichnungen

Sind H_1 und H_2 zwei selbstadjungierte Operatoren im Hilbertraum H , bezeichnet E_j ($j=1,2$) die Spektralschar von H_j , $R_j(z) := (H_j - z)^{-1}$ die Resolvente von H_j zum Wert z , wenn z in der Resolventenmenge $\rho(H_j)$ von H_j liegt und $\sigma(H_j)$ das Spektrum von H_j .

Ist K ein weiterer Hilbertraum, so ist $B(H,K)$ der Raum der beschränkten linearen Operatoren von H nach K , $B_\infty(H,K)$ der Teilraum der kompakten Operatoren. Ist $A : D(A) \rightarrow K$, $D(A) \subset H$, ein linearer Operator, wird seine Abschließung mit A^a bezeichnet, falls A abschließbar ist und mit A^* seine Adjungierte, falls $D(A)$ dicht ist.

Wenn $I \subset \mathbb{R}$ Borel-meßbar ist und M ein Hilbertraum, ist $L^2(I;M)$ der Hilbertraum der stark meßbaren Funktionen $f : I \rightarrow M$, f quadratintegrabel ist (vgl. [24], S.130). Das Skalarprodukt in $L^2(I;M)$ ist

$$\langle f, g \rangle_{L^2(I;M)} : \int_I \langle f(t), g(t) \rangle_M dt \quad (f, g \in L^2(I;M)).$$

Wenn I offen ist, besagt $I' \subset \subset I$, daß $\overline{I'}$ kompakt ist und $\overline{I'} \subset I$.

Die folgenden Voraussetzungen $(K1), (K2, I), (K3, I), (K4), (K5, I)$ (vgl. [10]) für H_1 und H_2 sind hinreichend für die von S.T. Kuroda bewiesenen Theoreme [10], 3.9 - 3.13 in denen die stationäre Methode sichtbar wird; zugleich bilden diese

Voraussetzungen, wie eine spätere Bemerkung zeigt, das Beweisschema für Theorem 1.16,3-5 und Theorem 1.19,I.3.

(K1)

Es gibt einen Hilbertraum $\mathbb{K}$, zwei abgeschlossene Operatoren A, B von $\mathbb{H}$ nach $\mathbb{K}$ und einen Operator $C \in B(\mathbb{K})$ mit den Eigenschaften

a) $D(A) \cap D(B) \supset D(H_1)$

b) $BR_1(z)A^*$ ist abschließbar und $C(BR_1(z)A^*)^a \in B(\mathbb{K})$ für ein (und damit alle) $z \in \rho(H_1)$.

c) Mit $Q_1(z) := C(BR_1(z)A^*)^a$, $G_1(z) := 1 + Q_1(z)$ ($z \in \rho(H_1)$) gilt :

Für jedes $z \in \rho(H_1) \cap \rho(H_2)$ existiert die Inverse $(G_1(z))^{-1}$ von $G_1(z)$ in $B(\mathbb{K})$ und es ist

$$R_2(z) = R_1(z) - (R_1(z)A^*)^a(G_1(z))^{-1}CBR_1(z)$$

Wenn H_1 und H_2 der Bedingung (K1) genügen, bezeichnet man diese Situation mit

$$H_2 \sim H_1 + A^*CB \sim H_1 + B^*C^*A.$$

(Diese Bezeichnung wird klar, wenn $\mathbb{H} = \mathbb{K}$, $A = C = \text{id}_{\mathbb{H}}$, $D(B) \supset D(H_1)$ und $H_2 = H_1 + B$, wo dann die Gleichung in (K1)c die Form $R_2(z) = R_1(z) - R_1(z)BR_2(z)$, die bekannte Resolventengleichung, annimmt.)

Mit $|H_j|^\theta := \int_{-\infty}^{\infty} |\lambda|^\theta dE_j(\lambda)$ und $\operatorname{sgn} H_j := \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn} \lambda dE_j(\lambda)$
 ($j = 1, 2; \theta \in [0, 1]$) sei

$$h_j^{(\theta)}(\cdot, \cdot) : D(|H_j|^\theta) \times D(|H_j|^{1-\theta}) \rightarrow \mathbb{C}$$

$$h_j^{(\theta)}(u, v) := \langle (\operatorname{sgn} H_j) |H_j|^\theta u, |H_j|^{1-\theta} v \rangle_{\mathbb{H}}$$

($j = 1, 2$); dann ergibt der folgende Satz ein hinreichendes Kriterium für (K1) (vgl. [10], Theorem 2.9).

(3.1) Satz

Seien H_1, H_2 zwei selbstadjungierte Operatoren in $\mathbb{H}$ und mit einem $\theta \in [0, 1/2]$ gelte ¹⁾

$$D(|H_1|^\theta) = D(|H_2|^\theta) =: \mathbb{D}_\theta$$

$$D(|H_1|^{1-\theta}) = D(|H_2|^{1-\theta}) =: \mathbb{D}_{1-\theta}.$$

Sind dann $\mathbb{K}$ ein weiterer Hilbertraum, A, B zwei abgeschlossene Operatoren von $\mathbb{H}$ nach $\mathbb{K}$ und $C \in \mathcal{B}(\mathbb{K})$, so daß

$$D(A) \cap D(B) \supset D(H_1), \quad D(A) \supset \mathbb{D}_{1-\theta}, \quad D(B) \supset \mathbb{D}_\theta$$

und

$$h_2^{(\theta)}(u, v) = \langle Au, v \rangle_{\mathbb{K}}, \quad u \in \mathbb{D}_\theta, v \in \mathbb{D}_{1-\theta},$$

($u \in \mathbb{D}_\theta, v \in \mathbb{D}_{1-\theta}$), gelten auch (K1) b, c, das heißt H_1 und H_2 erfüllen mit $\mathbb{K}, A, B, C$, die Bedingung (K1).

(3.2) Bemerkung

Theorem 2.9 in [10] (und damit Satz 3.1) bleibt richtig, wenn $\theta \in [0, 1]$. Der Beweis von [10], Theorem 2.9 ist wört-

¹⁾ Es genügt, $D(|H_1|^{1-\theta}) = D(|H_2|^{1-\theta})$ zu verlangen (vgl. [10])

lich zu übertragen. Die Anmerkung ¹⁾ auf der vorangehenden Seite bezieht sich dann auf die größere der beiden Zahlen $\theta, 1-\theta$.

Für die folgenden Bedingungen sei $I \subset \sigma(H_1)$ eine offene Menge.

(K2, I)

Es gibt einen Hilbertraum M_I und einen unitären Operator $F_I : E_1(I)H \rightarrow L^2(I; M_I)$, so daß für jede Borel-Menge $I' \subset I$

$$F_I E_1(I') F_I^{-1} = \chi_{I'},$$

wobei $(\chi_{I'}, f)(\lambda) = \chi_{I'}(\lambda) f(\lambda)$ ($\lambda \in I$) und $\chi_{I'}$ die charakteristische Funktion der Menge I' ist.

(K3, I)

Es existieren Funktionen

$$T_I(\cdot, A) : I \rightarrow B(K, M_I)$$

$$T_I(\cdot, B) : I \rightarrow B(K, M_I)$$

mit den Eigenschaften

- 1) $T_I(\cdot, A)$ und $T_I(\cdot, B)$ sind lokal hölderstetig bezüglich der Norm in $B(K, M_I)$.
- 2) Es gibt dichte Teilmengen $D \subset D(A^*)$ und $D' \subset D(B^*)$, so daß für jedes $u \in D$ bzw. $v \in D'$

$$T_I(\lambda, A)u = (F_I E_1(I) A^* u)(\lambda)$$

(L-f.ü. in I).

$$T_I(\lambda, B)v = (F_I E_1(I) B^* v)(\lambda)$$

(K4)

Für ein (und damit alle) $z \in \mathcal{P}(H_1)$ ist

$$BR_1(z) \in B_\infty(H, K) \text{ oder } AR_1(z) \in B_\infty(H, K).$$

(K5, I)

Der von der Menge

$$\{ E_j(I') A^* u ; u \in D(A^*), I' \subset I \text{ Borel-Menge} \}$$

erzeugte lineare Unterraum von H ist dicht in $E_j(I)H$
($j=1,2$).

(3.3) Bemerkung

1) (K2, I) besagt unter anderem, daß H_1 absolutstetig in I ist, weil $\|E_1(I')u\|_H^2 = \int_{I'} \|(F_I u)(\lambda)\|_{\mathcal{M}_I}^2 d\lambda = 0$, wenn $I' \subset I$ eine Borel-Menge mit L -Maß null ist.

2) (K5, I) ist erfüllt, wenn A injektiv ist, weil dann
 $R(A^*) = H$.

Der folgende Satz faßt den Inhalt von [10], Theorem 3.9 - 3.13 zusammen.

(3.4) Satz

Sind H_1 und H_2 zwei selbstadjungierte Operatoren in H ,
 $I \subset \sigma(H_1)$ eine offene Menge und sind die Bedingungen
(K1), (K2, I), (K3, I), (K4) und (K5, I) erfüllt, folgt :

1) Mit $\mathcal{C}^\pm := \{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Im} z < 0\}$, $\mathcal{C}_I^\pm := \mathcal{C}^\pm \cup I$ hat die

Abbildung

$$G_1 : \mathcal{U}^\pm \rightarrow B(K), \quad z \mapsto G_1(z)$$

eine eindeutige, in $\mathcal{U}^\pm$ lokal hölderstetige Fortsetzung $G_{1,\pm} : \mathcal{U}_I^\pm \rightarrow B(K)$ mit $G_{1,\pm}(z) = G_1(z) \quad (z \in \mathcal{U}^\pm)$.

2) Sei

$$e_{\pm,I} := \{\lambda \in I; G_{1,\pm}(\lambda) \text{ ist nicht injektiv}\}.$$

Dann ist $e_{\pm,I}$ eine bzgl. I abgeschlossene L -Nullmenge.¹⁾

Wenn $\lambda \in I \setminus e_{\pm,I}$, ist $G_{1,\pm}^{-1}(\lambda) \in B(K)$ und mit

$$Q_2(z) := G(BR_2(z)A^*)A \in B(K), \quad G_2(z) := 1 - Q_2(z) \quad (z \in \mathcal{G}(H_2))$$

hat die Abbildung

$$G_2 : \mathcal{U}^\pm \rightarrow B(K), \quad z \mapsto G_2(z)$$

eine eindeutige, in $\mathcal{U}_I^\pm \setminus e_{\pm,I}$ lokal hölderstetige Fortsetzung

$$G_{2,\pm} : \mathcal{U}_{I \setminus e_{\pm,I}}^\pm \rightarrow B(K)$$

mit $G_{2,\pm}(z) = G_2(z) \quad (z \in \mathcal{U}^\pm)$; ferner ist $G_{2,\pm}(z) = G_{1,\pm}^{-1}(z)$

(bzgl. $I \setminus e_{\pm,I}$).

3) Sei $e_I := e_{+,I} \cup e_{-,I}$. Dann gibt es einen eindeutig bestimmten unitären Operator $F_{\pm,I} : E_2(I \setminus e_I)H \rightarrow L^2(I; M_I)$, so daß für jede Borel-Menge $I' \subset I \setminus e_I$ und jedes $u \in D(A^*)$

$$(F_{\pm,I} E_2(I') A^* u)(\lambda) = \chi_{I'}(\lambda) T_I(\lambda, A) G_{2,\pm}(\lambda) u$$

(L -f.ü. in I) sowie $F_{\pm,I} E_2(I') F_{\pm,I}^{-1} = \chi_{I'}$.

¹⁾ Aus dem Beweis zu [10], folgt nur "abgeschlossen bzgl. I ".

4) Sei

$$W_{\pm} := W_{\pm}(H_2, H_1; I) := F_{\pm, I}^* F_I.$$

Dann ist $W_{\pm} : E_1(I)H \rightarrow E_2(I \setminus e_I)H$ ein unitärer Operator und es gilt

$$W_{\pm} E_1(I) u \in D(H_2) \quad (u \in D(H_1)).$$

$$H_2 W_{\pm} E_1(I) u = W_{\pm} E_1(I) H_1 u$$

Der Operator $S := S(H_2, H_1; I) := W_{+}^* W_{-}$ ist ein unitärer Operator in $E_1(I)H$ der mit H_1 kommutiert.

5) Sei $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Borel-meßbare Funktion, für die

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \left| \int_I f(\lambda) e^{-it\phi(\lambda)} -is\lambda \, d\lambda \right|^2 ds = 0$$

($f \in L^2(I)$). Dann existiert und ist

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} e^{it\phi(H_2)} e^{-it\phi(H_1)} u = W_{\pm} u \quad (u \in E_1(I)H).$$

(3.5) Bemerkung

1) Aus Satz 3.4,3 folgt, daß H_2 in $I \setminus e_I$ absolutstetig ist (vgl. Bemerkung 3.3,1).

2) Die Voraussetzungen $(K2, I)$, $(K3, I)$, $(K5, I)$ und damit auch die Aussagen in Satz 3.4 beziehen sich nur auf die Teilmenge $I \subset \sigma(H_1)$. Wenn I und e_I so beschaffen sind, daß $E_1(I)H = \mathcal{H}_{1,ac}$ und $E_2(I \setminus e_I)H = \mathcal{H}_{2,ac}$, folgt mit $\phi(t) := t$ ($t \in \mathbb{R}$), daß die Wellenoperatoren $W_{\pm}(H_2, H_1)$ existieren, vollständig sind und die in Satz 3.4,5 beschriebenen Invarianzeigenschaften haben.

Beim Nachweis von $(K2, I)$ (und damit auch von $(K3, I)$) ist aber I eventuell nicht so groß. Wir formulieren deshalb Satz 3.4 in der für Theorem 1.16 - 1.19 erforderlichen Weise um und zeigen in einem darauffolgenden Hilfssatz, inwieweit die Größe der Menge I keine Einschränkung ist.

(3.6) Satz

Sind H_1 und H_2 zwei selbstadjungierte Operatoren in $\mathbb{H}$, $I \subset \mathcal{S}(H_1)$ eine offene Menge und sind die Bedingungen $(K1)$, $(K2, I)$, $(K3, I)$, $(K4)$ und $(K5, I)$ erfüllt, folgt :

- 1) Es gibt eine bzgl. I abgeschlossene L - Nullmenge $E_I \subset I$ und unitäre Operatoren $W_{\pm} : E_1(I)\mathbb{H} \rightarrow E_2(I \setminus E_I)\mathbb{H}$ mit

$$W_{\pm} E_1(I) u \in D(H_2) \quad (u \in D(H_1)).$$

$$H_2 W_{\pm} E_1(I) u = W_{\pm} E_1(I) H_1 u$$

Der Operator $S := W_+^* W_-$ ist ein unitärer Operator in $E_1(I)\mathbb{H}$ der mit H_1 kommutiert.

- 2) Sei $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Borel-meßbare Funktion, für die

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \left| \int_I f(\lambda) e^{-it\phi(\lambda)} e^{-is\lambda} d\lambda \right|^2 ds = 0$$

($f \in L^2(I)$). Dann existiert und ist

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} e^{it\phi(H_2)} e^{-it\phi(H_1)} u = W_{\pm} u \quad (u \in E_1(I)\mathbb{H}).$$

(3.7) Lemma

- 1) Sei $J \subset \mathcal{S}(H_1)$ offen und mit abzählbar vielen paarweise disjunkten offenen Mengen $I_{\nu} \subset \mathcal{S}(H_1)$ ($\nu \in M \subset \mathbb{N}$) sei

$J = \bigcup_{v \in M} I_v$. Gelten dann für H_1 und H_2 die Voraussetzungen (K1), (K2, I_v), (K3, I_v), (K4) und (K5, I_v) ($v \in M$), kann in Bemerkung 3.3,1 und 3.5,1 I durch J ersetzt werden.

Ebenso in Satz 3.6, wobei $e_J := \bigcup_{v \in M} e_{I_v}$.

2) Ist darüberhinaus $\mathcal{C}(H_1) \setminus J$ eine Borel'sche L- Nullmenge und $\mathcal{C}_w(H_1) = \mathcal{C}_w(H_2)$, folgt zusätzlich zu 1), daß $E_1(J)H = H_{1,ac}$ und $E_2(J \setminus e_J)H = H_{2,ac}$ (vgl. Bem. 3.5,2).

(3.8) Bemerkung

Vergleicht man die Aussagen von Theorem 1.16 und 1.19, I mit Satz 3.6 und Lemma 3.7, sieht man die notwendigen Beweisschritte :

- 1) Existenz von H_1 und H_2 mit $\mathcal{C}_w(H_1) = \mathcal{C}_w(H_2)$.
- 2) Angabe einer offenen Menge $J \subset \mathcal{C}_{ac}(H_1)$, so daß $\mathcal{C}(H_1) \setminus J$ eine L- Nullmenge ist und J in abzählbar viele paarweise disjunkte offene Mengen I_v ($v \in M$) zerlegt werden kann, so daß (K1), (K2, I_v), (K3, I_v), (K4) und (K5, I_v) ($v \in M$) nachgewiesen werden können.

Beweis von Lemma 3.7

Ohne Einschränkung ist $M = \mathbb{N}$, ansonsten setzt man $I_v := \emptyset$ ($v \in \mathbb{N} \setminus M$) und sieht, daß die Voraussetzungen erhalten bleiben. Seien $e_v := e_{I_v}$ und $w_{\pm, v}$ entsprechend dem Satz 3.6. Dann ist $e_J = \bigcup_{v \in M} e_v$ bzgl. J abgeschlossen und eine L- Nullmenge.

Ausgehend von den Eigenschaften der Spektralschar E_j ($j=1,2$) (vgl. [9], S.353 ff.) folgt unmittelbar, daß H_1 in

J und H_2 in $J \setminus e_J$ absolutstetig ist.

Sei $u \in E_1(J)H$. Dann gilt für $u_k := \sum_{\lambda=1}^k E_1(I_\lambda)u$ $u = \lim_{k \rightarrow \infty} u_k$ und mit $v_1 := \sum_{\lambda=1}^1 W_{\pm, \lambda} E_1(I_\lambda)u$ erhält man

$$(3.9) \quad \|v_k - v_1\|_H^2 = \sum_{\nu=1+1}^k \|E_2(I_\nu \setminus e_\nu) W_{\pm, \nu} E_1(I_\nu)u\|_H^2 \\ = \sum_{\nu=1+1}^k \|E_1(I_\nu)u\|_H^2 = \|u_k - u_1\|_H^2$$

($1, k \in \mathbb{N}$, $k > 1$) und die Existenz von $W_{\pm} u := W_{\pm}(H_2, H_1; J)u := \lim_{1 \rightarrow \tau} v_1 \in E_2(J \setminus e_J)H$ mit $\|W_{\pm} u\|_H = \|u\|_H$. Die Surjektivität von $W_{\pm} : E_1(J)H \rightarrow E_2(J \setminus e_J)H$ folgt mit (3.9) in entsprechender Weise, so daß $W_{\pm}$ unitär ist.

Sei $u \in D(H_1)$ und $v := E_1(J)u$. Dann ist

$$(3.10) \quad E_2(I_\nu \setminus e_\nu) W_{\pm} v = E_2(I_\nu \setminus e_\nu) W_{\pm, \nu} E_1(I_\nu) v \\ = E_2(I_\nu) W_{\pm, \nu} E_1(I_\nu) v \quad (\nu \in \mathbb{N})$$

und wegen Satz 3.6,1 gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 d\|E_2(\cdot) W_{\pm, \nu} E_1(I_\nu)u\|_H^2 = \int_{-\infty}^{\tau} \lambda^2 d\|E_1(\cdot) E_1(I_\nu)u\|_H^2 \quad (\nu \in \mathbb{N}).$$

Daraus folgt mit (3.10) und $E_1(I_\nu)v = E_1(I_\nu)u$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 d\|E_2(\lambda) W_{\pm} E_1(J)u\|_H^2 = \sum_{\nu=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\tau} \lambda^2 d\|E_2(\lambda) E_2(I_\nu) W_{\pm, \nu} E_1(I_\nu)u\|_H^2 \\ = \sum_{\nu=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 d\|E_1(\lambda) E_1(I_\nu)u\|_H^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 d\|E_1(\lambda)u\|_H^2 < \infty,$$

also $W_{\pm} E_1(J)u \in D(H_2)$. Ferner ist wegen Satz 3.6,1

$$H_2 W_{\pm} E_1(J)u = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{\mu=1}^m H_2 E_2(I_\mu \setminus e_\mu) W_{\pm} E_1(J)u \\ = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{\mu=1}^m W_{\pm, \mu} E_1(I_\mu) E_1(J) H_1 u = W_{\pm} E_1(J) H_1 u.$$

Wie bei $W_{\pm}$ zeigt man, daß

$$W_{\pm}^* u = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{\mu=1}^m W_{\pm, \mu}^* E_2(I_{\mu} \setminus e_{\mu}) u \quad (u \in E_2(J \setminus e_J)H),$$

woraus mit (3.10)

$$W_{+}^* W_{-} u = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{\mu=1}^m W_{+, \mu}^* W_{-, \mu} E_1(I_{\mu}) u \quad (u \in E_1(J)H)$$

folgt. Auf die gleiche Weise wie zuvor erhält man für $u \in D(H_1)$, daß $W_{+}^* W_{-} E_1(J)u \in D(H_1)$ und $W_{+}^* W_{-} E_1(J)H_1 u = H_1 W_{+}^* W_{-} E_1(J)u$; das heißt, $S = W_{+}^* W_{-}$ kommutiert mit H_1 .

Sei $\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Borel-meßbare Funktion. Genügt ϕ der in Satz 3.6,2 angegebenen Bedingung mit J statt I (also erstrecht mit I_1 statt I ($1 \in \mathbb{N}$)), folgt für $u \in E_1(J)H$ mit (3.9) und der Isometrie der Operatoren $e^{it\phi(H_2)} e^{-it\phi(H_1)}$ ($t \in \mathbb{R}$)

$$\begin{aligned} \|W_{\pm} u - e^{it\phi(H_2)} e^{-it\phi(H_1)} u\|_H &= \\ &= \left\| \sum_{\mu=1}^m W_{\pm, \mu} E_1(I_{\mu}) u - e^{it\phi(H_2)} e^{-it\phi(H_1)} \sum_{\mu=1}^m E_1(I_{\mu}) u \right\|_H \\ &= \left\| \sum_{\mu=1}^m (W_{\pm, \mu} E_1(I_{\mu}) - e^{it\phi(H_2)} e^{-it\phi(H_1)} E_1(I_{\mu})) u \right\|_H \\ &\leq \sum_{\mu=1}^m \|W_{\pm, \mu} E_1(I_{\mu}) u - e^{it\phi(H_2)} e^{-it\phi(H_1)} E_1(I_{\mu}) u\|_H \\ &\quad + 2 \|E_1(J)u - \sum_{\mu=1}^m E_1(I_{\mu}) u\|_H, \end{aligned}$$

$m \in \mathbb{N}$, also

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{it\phi(H_2)} e^{-it\phi(H_1)} u = W_{\pm} u \quad (u \in E_1(J)H).$$

H_1 ist absolutstetig in J , folglich ist $E_1(J)H \subset H_{1,ac}$.

Falls $(H_1 \setminus J)$ eine L - Nullmenge ist, gilt $E_1((H_1 \setminus J)u) = 0$, wenn $u \in H_{1,ac}$, also $u = E_1((H_1 \setminus J)u) + E_1(J)u \in E_1(J)H$.

Weil $J \subset \sigma_{ac}(H_1) \subset \sigma_w(H_1)$, gilt, falls $\sigma_w(H_1) = \sigma_w(H_2)$, $\sigma(H_2) \setminus (J \setminus e_J) = \sigma_d(H_2) \cup (\sigma_w(H_1) \setminus J) \cup e_J$ und die rechte Seite ist eine Borel'sche L - Nullmenge. Daraus folgt wie zuvor $E_2((H_2 \setminus J)u) = 0$, wenn $u \in H_{1,ac}$.

Ausgehend vom Beweis zu ([10], Theorem 3.9 - 3.13) hat M. Schechter ([19], §3) gezeigt, daß für zwei selbstadjungierte Operatoren H_1 und H_2 die Ergebnisse von ([10], Theorem 3.9 - 3.13) zutreffen, wenn die folgenden Voraussetzungen erfüllt sind (vgl. [19], 3.1 - 3.4 und Lemma 3.25; I ist wieder eine offene Teilmenge von $\sigma(H_1)$):

(SC1)

Es gibt einen Hilbertraum K und abgeschlossene Operatoren A, B von H nach K , so daß

$$a) \quad D(|H_1|^{1/2}) \subset D(A) \cap D(B)$$

$$b) \quad D(|H_1|^{1/2}) = D(|H_2|^{1/2}) =: D_{1/2} \quad \text{und}$$

$$h_2^{(1/2)}(u, v) = h_1^{(1/2)}(u, v) + \langle Bu, Av \rangle_K \quad (u, v \in D_{1/2}).$$

(SC2, I)

Es gibt einen Hilbertraum M_I und einen unitären Operator $F_I : E_1(I)H \rightarrow L^2(I; M_I)$, so daß für jede Borel-Menge $I' \subset I$

$$F_I E_1(I') F_I^{-1} = \chi_{I'} \quad .$$

(SC3, I)

1) Es gibt eine Abbildung $M_I: I \rightarrow B(K)$, so daß $M_I \in L_{loc}^1(I; B(K))$ und

$$\frac{d}{d\lambda} \langle E_1(\lambda) A^* u, A^* v \rangle_{\mathbb{H}} = \langle M_I(\lambda) u, v \rangle_{\mathbb{K}} \quad \left(\begin{array}{l} \text{L-f.ü. in } I \\ u, v \in D(A^*) \end{array} \right).$$

2) Es gibt eine Abbildung $\tilde{M}_I: I \rightarrow B(K)$, so daß $\tilde{M}_I$ bzgl.der Norm in $B(K)$ lokal hölderstetig ist und

$$\frac{d}{d\lambda} \langle E_1(\lambda) A^* u, B^* v \rangle_{\mathbb{H}} = \langle \tilde{M}_I(\lambda) u, v \rangle_{\mathbb{K}} \quad \left(\begin{array}{l} \text{L-f.ü. in } I \\ u \in D(A^*) \\ v \in D(B^*) \end{array} \right).$$

(SC4)

Es gibt ein $z_0 \in \wp(H_1) \cap \wp(H_2)$, so daß

$$BR_1(z)(R_1(z_0)A^*)^a \in B_{\infty}(K) \quad (z \in \wp(H_1)).$$

(SC5)

 A ist injektiv.(3.11) Bemerkung

(SC1) kann durch (K1) ersetzt werden, (SC2, I) und (SC4) entspricht (K2, I) bzw. (K4) und aus (SC5) folgt (K5, I), so daß sich die neuen Bedingungen im wesentlichen nur in (K3, I) und (SC3, I) unterscheiden.

Bis auf die Vertauschung von (SC1) mit (K1) ist an diesen Aussagen alles klar. Im Beweis von ([19], Theorem 3.1)

benützt M. Schechter bis einschließlich Lemma 3.5 die

Beweise aus [10]. Dort wird nur (K1) benötigt und (K1)

folgt aus (SC1), wie Satz 3.1 mit $\theta = 1/2$ und $C = \text{id}_K$

zeigt. Im restlichen Teil des Beweises zu ([19], Theorem 3.1)

geht aber (SC1) nicht mehr explizit ein, das heißt, es

werden nur die im ersten Teil bewiesenen Aussagen verwendet.

Das Beweisschema ist dann für Theorem 1.20 bis auf (K3,I), wo (SC3,I) gezeigt wird, das gleiche wie in Bemerkung 3.8.

Theorem 1.17 und 1.19,II unterscheiden sich von Theorem 1.16 und 1.19,I durch eine zusätzliche Aussage über die Eigenschaften des singulären Spektrums von H_2 in $[\lambda_{\min}, \infty) \setminus \Lambda$.

Wenn H_1 und H_2 mit einem $\theta \in [0, 1/2]$ die Voraussetzungen von Satz 3.1 (und damit (K1)) erfüllen, ferner für eine offene Teilmenge $I \subset \mathbb{C}(H_1)$ die Voraussetzungen (K2,I) und (K3,I) gegeben sind, A injektiv ist (also (K5,I) gilt) und (K4) zutrifft, hat S.T. Kuroda in ([10], §5) eine Reihe von zusätzlichen Bedingungen für die Untersuchung des singulären Spektrums von H_2 in I angegeben, woraus sich zusammen mit Bemerkung 3.8 der Beweis zu Theorem 1.17 und 1.19,II ergibt.

Zunächst sei $Y_0 := D(A)$ mit der Norm $\|u\|_{Y_0} := \|Au\|_K$ und Y die Vervollständigung von Y_0 bzgl. dieser Norm; X sei der abgeschlossene Unterraum von K , definiert durch $X := \overline{\text{Bild}(A)}^K$. Dann läßt sich die Abbildung $A_0 : Y_0 \rightarrow X$, $u \mapsto Au$, in eindeutiger Weise zu einem unitären Operator $A : Y \rightarrow X$ fortsetzen. Ferner wird $S \subset D_\theta$ definiert durch

$$(3.12) \quad S := \{ u \in D_\theta ; \exists c_u > 0, |h_1^{(\theta)}(u, v)| \leq c_u \|v\|_Y, \\ |\langle u, v \rangle_H| \leq c_u \|v\|_Y \quad (v \in D_{1-\theta}) \}.$$

Die erste Zusatzbedingung für H_1 und H_2 lautet (vgl. [10], §5, Ass.5.4) :

(K6)

Der Unterraum $\mathbb{D}_{1-\theta}$ von $\mathbb{Y}_0$ ist dicht in $\mathbb{Y}$.

(3.13) Bemerkung

Eine hinreichende Bedingung für (K6) ist es, wenn $A|_{\mathbb{D}_{1-\theta}}$ abschließbar ist und $(A|_{\mathbb{D}_{1-\theta}})^a = A$.

Sei $A_1 \in B(K)$, $A_1 > 0$, ein positiver selbstadjungierter Operator. Dann werden wie in ([10], §5.4) mit A_1 die Begriffe L , L^δ , K_δ , $\|\cdot\|_{K_\delta}$, $A_1^{\delta', \delta}$ ($\delta, \delta' \in \mathbb{R}$) gebildet (K_δ entspricht der dortigen Bezeichnung $\underline{K}_\delta$) :

A_1 ist positiv, also injektiv. $L := A_1^{-1}$ ist abgeschlossen und nach unten beschränkt mit einer positiven Schranke c .

Sei $\delta \in \mathbb{R}$ und K_δ die Vervollständigung von $D(L^\delta)$ bzgl. der Norm $\|u\|_{K_\delta} := \|L^\delta u\|_K$. Wenn $\delta > 0$, ist $D(L^\delta)$ bzgl. dieser Norm bereits vollständig; wenn $\delta = 0$, ist $K_0 = K$. Ferner ist $K_\delta \subset K_{\delta'}$, wenn $\delta' \leq \delta$.

Für $\delta, \delta' \in \mathbb{R}$ bezeichnet $A_1^{\delta', \delta}$ den unitären Operator von K_δ auf $K_{\delta'}$, der durch $A_1^{\delta', \delta} u = L^{-\delta'} L^\delta u$ ($u \in D(L^{-\delta'} L^\delta)$) eindeutig festgelegt ist.

Die folgenden Bedingungen (K7), (K8), (K9,I) und (K10) (vgl. [10], §5, Ass.5.12, Ass.5.13, Ass.5.15, Ass.5.19) beziehen sich auf diese Definitionen.

(K7)

Es gibt einen positiven selbstadjungierten Operator $A_1 \in B(K)$, $A_1 > 0$, und einen Operator G von $D(G) := D(A)$ nach K_{-1} , so daß $A = A_1^{0,-1} G$.

(K8)

$G(D_{1-\theta}) \subset K$ und mit einem $c > 0$ gilt

$$\|Gu\|_K \leq c(\| |H_1|^{1-\theta} u \|_H + \|u\|_H) \quad (u \in D_{1-\theta}).$$

(K9, I)

Wenn $\gamma \geq 0$, ist $T_I(\lambda, B)C^* \in B(K_\gamma, M_I)$ ($\lambda \in I$). Es gibt eine von $\gamma \geq 0$ unabhängige Zahl $\rho_0 > 0$ und zu jedem Intervall $I' \subset I$ und $\gamma \geq 0$ eine Konstante $c_{I', \gamma}$, so daß mit $\sigma_\gamma := \min\{\gamma/2 + \rho_0, 1\}$

$$\|(T_I(\lambda, B) - T_I(\lambda', B))C^*u\|_{M_I} \leq c_{I', \gamma} |\lambda - \lambda'|^{\sigma_\gamma} \|u\|_{K_\gamma}$$

($\lambda, \lambda' \in I'$, $u \in K_\gamma$, $\gamma \geq 0$).

(3.14) Bemerkung

In (K9, 1) kann die Festlegung des Hölderexponenten folgendermaßen abgeändert werden :

... . Es gibt von $\gamma \geq 0$ unabhängige Zahlen $\rho_0 > 0$, $\varepsilon_0 > 1/2$
 ... , so daß mit $\sigma_\gamma := \min\{\gamma/2 + \rho_0, \varepsilon_0, 1\}$

Diese Änderung erscheint uns sinnvoll, weil, wie sich zeigen wird, der Hölderexponent σ von $T_I(\lambda, B)C^*$ unter anderem durch $\min\{\beta, 1\}$ nach oben begrenzt wird, wobei β der Hölderexponent der Funktionen T_μ ($1 \leq \mu \leq N$) ist.

Aus der Bedeutung von ([10], Lemma 5.17), wo die Bedingung (K9,I) eingeht, ersieht man, daß die Änderung zulässig ist. Dieser Hilfssatz wird bei einem Iterationsverfahren verwendet, mit dem ausgehend von einem bestimmten $u \in K_0 = K$ gezeigt wird, daß $u \in K_1$:

Sei $\lambda_0 \in I$, $\gamma_0 > 0$, $u \in K_{\gamma_0}$ und σ_{γ_0} , $0 < \sigma_{\gamma_0} \leq 1$, der Hölderexponent von $T_I(\cdot, B)C^* : I \rightarrow B(K_{\gamma_0}, M_I)$ in einer Umgebung von λ_0 . Dann gilt :

$$u \in K_{\gamma} \quad (0 \leq \gamma < 2\sigma_{\gamma_0}) \quad , \quad \text{falls} \quad \sigma'_{\gamma_0} \leq 1/2$$

$$u \in K_1 \quad , \quad \text{falls} \quad \sigma'_{\gamma_0} > 1/2 \quad .$$

Daran sieht man, daß es ausreicht, mit einem $\gamma_1 > 0$

$$\sigma_{\gamma_1} = \min\{\gamma_1/2 + \rho_0, \sigma_0, 1\} > 1/2 \quad \text{zu erhalten.}$$

(K10)

Sei $y \in Y$ und $Ay \in K_1$. Dann ist $y \in D_{1-\theta}$ (also $Ay = Ay$) und mit einem $c > 0$ gilt $\|y\|_H \leq c\|Ay\|_{K_1}$.

Schließlich soll gelten (vgl. [10], Ass.5.20; (3.12)) :

(K11)

Für jedes $u \in D_\theta$ und $j = 1, 2$ gibt es eine Folge $(\phi_m^{(j)})_{m \in \mathbb{N}}$ in S , so daß $\lim_{m \rightarrow \infty} \|u - \phi_m^{(j)}\|_H = 0$ und

$$h_j^{(\theta)}(u, v) = \lim_{m \rightarrow \infty} h_j^{(\theta)}(\phi_m^{(j)}, v) \quad (v \in D_{1-\theta}).$$

Mit diesen zusätzlichen Bedingungen folgt (vgl. [10], Theorem 5.21, Lemma 5.22 und die Bemerkung am Ende von §4.1) :

(3.15) Satz

Sind H_1 und H_2 zwei selbstadjungierte Operatoren in H , $I \subset \sigma(H_1)$ eine offene Menge, gelten mit einem $\theta \in [0, 1/2]$ die Voraussetzungen von Satz 3.1, $(K2, I)$, $(K3, I)$, $(K4)$, ist A injektiv und sind die Bedingungen $(K6) - (K8)$, $(K9, I)$, $(K10)$ und $(K11)$ erfüllt, gilt zusätzlich zu Satz 3.4 :

$$1) \quad e_{+, I} = e_{-, I} = e_I .$$

2) Für jedes kompakte Intervall $I' \subset I$ ist $E_2(I' \cap e_I)$ eine endlich-dimensionale Projektion. Das in der Menge e_I enthaltene singuläre Spektrum von H_2 in I besteht, falls nichtleer, aus Eigenwerten von H_2 endlicher Vielfachheit, die in I keinen Häufungspunkt haben.

(3.16) Bemerkung

1) Aufgrund von Bemerkung 3.14 kann in Satz 3.15 $(K9, I)$ durch $(K9, I)'$ ersetzt werden, wobei $(K9, I)'$ die abgeänderte Bedingung ist.

2) Ist $J \subset \sigma(H_1)$ eine offene Menge wie in Lemma 3.7 und gelten für jede Menge I_ν ($\nu \in M$) die Voraussetzungen von Satz 3.15, kann in dessen Ergebnis offenbar I durch J ersetzt werden, wobei $e_J := \bigcup_{\nu \in M} e_{I_\nu}$.

§ 4 Der ungestörte Operator H_1

Sei $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, die mit einer positiven Zahl r und positiven Konstanten c_1, c_2, c_3 der Bedingung $[T]$ genügt. Dann ist wegen (1.7) $H^{r,2} = \{u \in L^2; (1+|\cdot|^2)^{r/2} f u \in L^2\} = \{u \in L^2; T f u \in L^2\}$ und mit

$$(4.1) \quad D(H_1) := H^{r,2}, \quad H_1 u := f^* T f u \quad (u \in H^{r,2})$$

ist H_1 ein selbstadjungierter Operator in L^2 .

(4.2) Satz

Für den durch (4.1) definierten Operator H_1 gelten die Eigenschaften a) - c) aus Theorem 1.16, 1. Wenn für T zusätzlich $Z_1 := \{x \in \mathbb{R}^n \setminus Z; \text{grad } T(x) = 0\}$ eine L -Nullmenge ist, ist H_1 absolutstetig.

(4.3) Lemma

Sei T wie oben gegeben. Dann gilt :

- 1) Mit $\lambda_{\min} := \inf\{T(x); x \in \mathbb{R}^n\}$ ist $\{T(x); x \in \mathbb{R}^n\} = [\lambda_{\min}, \infty)$.
- 2) $\Lambda_0 := \{\lambda \in \mathbb{R}; \exists x \in \mathbb{R}^n \setminus Z, T(x) = \lambda, \text{grad } T(x) = 0\}$ ist eine L -Nullmenge, $\Lambda = \Lambda_0 \cup T(Z)$ ist eine abgeschlossene L -Nullmenge, $[\lambda_{\min}, \omega) \setminus \Lambda$ ist offen.
- 3) $Z \cup Z_1$ ist abgeschlossen. Für eine L -Nullmenge $\tilde{R} \subset \mathbb{R}$ ist $\tilde{T}(\tilde{R}) \cap (\mathbb{R}^n \setminus (Z \cup Z_1))$ eine L -Nullmenge.

Beweis

Sei $\lambda \in \mathbb{R}$ und $(x_m)_{m \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}^n$ mit $\lim_{m \rightarrow \infty} T(x_m) = \lambda$.

Wegen (1.7) ist $(x_m)_{m \in \mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge, hat also eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert $x \in \mathbb{R}^n$, für den wegen der Stetigkeit von T $T(x) = \lambda$ gilt. Da $\lim_{|x| \rightarrow \infty} T(x) = \infty$ und $T(\mathbb{R}^n)$ zusammenhängend ist, folgt 1).

Die Abgeschlossenheit von Λ folgt entsprechend, da Z abgeschlossen ist. Aus einem Theorem von Sard ([20]) erhält man, daß Λ_0 (und damit auch Λ) eine L - Nullmenge ist.

Sei $x_0 \in \mathbb{R}^n \setminus (Z_1 \cup Z)$ und etwa $\frac{\partial}{\partial x_1} T(x_0) \neq 0$. Für die Ableitung $D T_1$ der Abbildung $T_1: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $T_1(x) := (T(x), x_2, \dots, x_n)$, gilt dann $\text{Det}(D T_1(x_0)) \neq 0$. Aus dem Satz über implizite Funktionen folgt damit die Existenz offener Umgebungen $U(T(x_0))$ in $\mathbb{R}$, $U(x'_0)$ in $\mathbb{R}^{n-1}$ ($x'_0 = (x_{0,2}, \dots, x_{0,n})$) und $U(x_0)$ in $\mathbb{R}^n \setminus (Z_1 \cup Z)$ (Z_1, Z ist offensichtlich abgeschlossen), so daß $T_1: U(x_0) \rightarrow U(T(x_0)) \times U(x'_0)$ k_n -mal umkehrbar stetig differenzierbar ist.

Sei $\tilde{R} \subset \mathbb{R}$ eine L - Nullmenge. Dann ist $\tilde{R} \cap U(T(x_0))$ und damit auch $\tilde{R}' := (\tilde{R} \cap U(T(x_0))) \times U(x'_0)$ eine L - Nullmenge.

Mit ([17], S. 173) folgt, daß $T_1^{-1}(\tilde{R}')$ eine L - Nullmenge und daher, da $\tilde{T}^{-1}(\tilde{R}) \cap U(x_0) \subset T_1^{-1}(\tilde{R}')$, auch $\tilde{T}^{-1}(\tilde{R}) \cap U(x_0)$ eine L - Nullmenge ist. Als offene Menge läßt sich $\mathbb{R}^n \setminus (Z_1 \cup Z)$ von abzählbar vielen Mengen vom Typ $U(x_0)$ überdecken, folglich ist $\tilde{T}^{-1}(\tilde{R}) \cap (\mathbb{R}^n \setminus (Z_1 \cup Z))$ eine L - Nullmenge.

Schließlich ist $\lambda_{\min} \in \Lambda$: Wäre $\lambda_{\min} = T(x)$ mit $x \in \mathbb{R}^n \setminus (Z_1 \cup Z)$, folgte mit der Setzung $x_0 := x$ ein Widerspruch gegen die Infimum-Eigenschaft von $\lambda_{\min}$. Infolgedessen ist $(\lambda_{\min}, \infty) \setminus \Lambda = (\lambda_{\min}, \infty) \setminus \Lambda$ offen.

Beweis von Satz 4.2

zu 1.16,1.a : Man sieht ohne weiteres, daß $\mathcal{G}(H_1) = T(\mathbb{R}^n)$.

Wegen Lemma 4.3,1 genügt es, $\mathcal{G}(H_1) \subset \mathcal{G}_w(H_1)$ nachzuweisen.

Sei $u_k \in C_0^\infty$ mit $\|u_k\| = 1$ und $\text{supp } u_k \subset \{x \in \mathbb{R}^n; |x| \leq k^{-1}\}$ ($k \in \mathbb{N}$). Dann ist mit $\lambda = T(x_0) \in \mathcal{G}(H_1)$ durch $v_k := f^* u_k(\cdot - x_0)$ eine Folge $(v_k)_{k \in \mathbb{N}}$ mit $v_k \in D(H_1)$, $\|v_k\| = 1$, $w\text{-}\lim_{k \rightarrow \infty} v_k = 0$ und $\lim_{k \rightarrow \infty} (H_1 - \lambda)v_k = 0$ definiert. Folglich ist $\lambda \in \mathcal{G}_w(H_1)$ $\forall \lambda \in \mathcal{G}(H_1)$, d.h.

zu 1.16,1.b : Aus Lemma 4.3 folgt, daß Λ eine abgeschlossene L- Nullmenge und $[\lambda_{\min}, \infty) \setminus \Lambda$ offen ist. Bekanntlich ist die Spektralschar E_1 von H_1 gegeben durch

$$f E_1(\lambda) u = \chi_{\{x \in \mathbb{R}^n; T(x) \leq \lambda\}} f u \quad (\lambda \in \mathbb{R}, u \in L^2).$$

Für das auf den Borel-Mengen $\mathcal{B}$ von $\mathbb{R}$ definierte Spektralmaß $E_1: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}(L^2)$ gilt $f E_1(\tilde{R}) u = \chi_{\tilde{T}(\tilde{R})} f u$ ($u \in L^2$, $\tilde{R} \in \mathcal{B}$).

Sei $u \in E_1([\lambda_{\min}, \infty) \setminus \Lambda) L^2$ und $\tilde{R}$ eine L- Nullmenge in $\mathcal{B}$.

Dann ist $\tilde{T}^{-1}(\tilde{R} \cap ([\lambda_{\min}, \infty) \setminus \Lambda)) \subset \mathbb{R}^n \setminus (Z_1 \cup Z)$, also eine L- Nullmenge und

$$\begin{aligned} \langle E_1(R) u, u \rangle &= \langle E_1(\tilde{R} \cap ([\lambda_{\min}, \infty) \setminus \Lambda)) u, u \rangle \\ &= \int_{\tilde{T}^{-1}(\tilde{R} \cap ([\lambda_{\min}, \infty) \setminus \Lambda))} |f u(x)|^2 dx = 0. \end{aligned}$$

Infolgedessen ist $u \in \mathcal{H}_{1,ac}$. Mit der gleichen Begründung

wie für Lemma 3.7,2 folgt $E_1([\lambda_{\min}, \infty) \setminus \Lambda) L^2 = \mathcal{H}_{1,ac}$.

Wenn Z_1 eine L- Nullmenge ist, kann $\mathbb{R}$ anstelle von

$[\lambda_{\min}, \infty) \setminus \Lambda$ und $\mathbb{R}^n$ anstelle von $\mathbb{R}^n \setminus (Z_1 \cup Z)$ gesetzt werden,

so daß $L^2 = \mathcal{H}_{1,ac}$, also H_1 absolutstetig ist.

zu 1.16,1.c : Aus (1.7) folgt unmittelbar, daß
 $c_1'(1+|x|^2)^{r/4} - c_3' \leq |T(x)|^{1/2} \leq c_2'(1+|x|^2)^{r/4} \quad (x \in \mathbb{R}^n)$
 mit geeigneten Konstanten c_1', c_2', c_3' . Demnach ist
 $D(|H_1|^{1/2}) = \{u \in L^2; |T|^{1/2}fu \in L^2\} = \{u \in L^2; (1+|\cdot|)^{r/4}fu \in L^2\} =$
 $= H^{r/2,2}$ und $|H_1|^{1/2}u = f^*|T|^{1/2}fu$. Ferner ist

$$(4.4) \quad c_1 \|u\|_{r/2,2}^2 - c_3 \|u\|^2 \leq \| |H_1|^{1/2} u \|^2 \leq c_2 \|u\|_{r/2,2}^2$$

($u \in H^{r/2,2}$). Sieht man von der Aussage " $D(|H_1|^{1/2}) = H^{r/2,2}$ "
 ab, gilt allgemein 1.16,1.c für einen selbstadjungierten,
 nach unten beschränkten Operator H in einem Hilbertraum $\mathbb{H}$.
 Dies ist eine einfache Folgerung aus ([9], Kap. VI, §1) :

Die auf $D(h_0) := D(H)$ mit $h_0(u, v) := \langle Hu, v \rangle_{\mathbb{H}}$ definierte
 Sesqui-Linearform h_0 ist symmetrisch, nach unten beschränkt
 und abschließbar. Ein $u \in \mathbb{H}$ ist genau dann im Definitions-
 bereich $D(h)$ der Abschließung h von h_0 , wenn es eine
 Folge $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in $D(h_0)$ gibt, so daß $\lim_{k \rightarrow \infty} u_k = u$ in $\mathbb{H}$ und
 $\lim_{m \rightarrow \infty} \sup_{1, k \geq m} |h_0(u_1 - u_k)| = 0$, wobei $h_0(v) := h_0(v, v)$. Dann ist

$$(4.5) \quad h(u, u) = \lim_{k \rightarrow \infty} h_0(u_k, u_k)$$

und h ist durch (4.5) eindeutig festgelegt. Insbesondere
 ist $D(H)$ ein Core von h (vgl. [9], S. 317).

Mit einem $c \in \mathbb{R}$ ist $H_1 + c > 0$; folglich ist
 $D(H) \subset D(|H|^{1/2}) = D((H_1 + c)^{1/2})$ und mit $u \in D(H)$ gilt

$$(4.6) \quad \begin{aligned} \| |H|^{1/2} u \|_{\mathbb{H}}^2 &\leq \| (H_1 + c)^{1/2} u \|_{\mathbb{H}}^2 + c \| u \|_{\mathbb{H}}^2 \\ &= \langle (H_1 + c) u, u \rangle_{\mathbb{H}} + c \| u \|_{\mathbb{H}}^2 = \langle Hu, u \rangle_{\mathbb{H}} + 2c \| u \|_{\mathbb{H}}^2. \end{aligned}$$

Sei $u \in D(h)$ und $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine entsprechende Folge in $D(H)$. Aus (4.5) und (4.6) folgt dann, da $|H|^{1/2}$ selbstadjungiert ist, daß $u \in D(|H|^{1/2})$ und

$$\begin{aligned} h(u, u) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \langle H u_k, u_k \rangle_H = \lim_{k \rightarrow \infty} \langle (\operatorname{sgn} H) |H|^{1/2} u_k, |H|^{1/2} u_k \rangle_H \\ &= \langle (\operatorname{sgn} H) |H|^{1/2} u, |H|^{1/2} u \rangle_H. \end{aligned}$$

Ist andererseits $u \in D(|H|^{1/2})$, E die Spektralschar von H und $(I_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge von beschränkten Intervallen in $\mathbb{R}$ mit $I_k \subset I_{k+1}$ ($k \in \mathbb{N}$) und $\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k = \mathbb{R}$, ist $u_k := E(I_k)u \in D(H)$ und

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|u_k - u\|_H = 0.$$

Es ist

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \|h_0(u_k - u_1)\| \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \| |H|^{1/2} (u_k - u_1) \|_H^2 = 0,$$

also $u \in D(h)$.

Schließlich folgt aus ([9], Kap. VI, §2, Kor. 2.4), daß $H = H_n$.

Zusammen mit (1.7) und dem Beweis zu 1.16, 1.c folgt

$$(4.1) \quad \langle u, v \rangle_{h_0} = \langle u, v \rangle_H \quad \text{für } u, v \in D(h_0),$$

wenn $u \in H^{r/2, 2}$.

Im Sinne der Bemerkung 3.8 wird $J := [\lambda_{\min}, \infty) \setminus \Lambda$. Als offene Menge in $\mathbb{R}$ kann J in abzählbar viele, paarweise disjunkte Zusammenhangskomponenten - offene Intervalle - zerlegt werden. Im Folgenden sei I ein derartiges Intervall.

Eine der Eigenschaften von H_1 ist $(K2, I)$, die mit dem nächsten Satz nachgewiesen werden kann; zugleich dient dieser dem Nachweis der Hölderstetigkeit der angestrebten Operatoren $T_I(\lambda, A)$ und $T_I(\lambda, B)$.

Zunächst einige Begriffe aus der Differentialgeometrie (vgl. [4], 3.1.18-3.1.22) :

Sei $W \subset \mathbb{R}^n$, $1, k \geq 1$ ($1, k \in \mathbb{N}$). Eine Abbildung $f : W \rightarrow \mathbb{R}^1$ heißt k -mal stetig differenzierbar bzgl. W , wenn es zu jedem $a \in W$ eine offene Umgebung $U(a)$ in $\mathbb{R}^n$ und eine k -mal stetig differenzierbare Abbildung $g_a : U(a) \rightarrow \mathbb{R}^1$ gibt, so daß $g_a|_{U(a) \cap W} = f|_{U(a) \cap W}$. Ist $f : W \rightarrow W'$ bijektiv, heißt f k -Diffeomorphismus, wenn f und f^{-1} k -mal stetig differenzierbar sind.

W heißt m -dimensionale Teilmannigfaltigkeit der Klasse k ($k \leq m$), wenn es zu jedem $a \in W$ eine offene Umgebung $U(a)$ in $\mathbb{R}^n$ gibt, eine offene, konvexe Menge V in $\mathbb{R}^m$ und k -mal stetig differenzierbare Abbildungen $\phi : U(a) \rightarrow V$, $\psi : V \rightarrow U(a)$, so daß $\text{Bild } \psi = U(a) \cap W$ und $\phi \circ \psi = \text{id}_V$. (Man vergleiche die dazu äquivalenten Bedingungen in 3.1.18).

$\psi|_{U(a) \cap W}$ heißt Koordinatensystem in $U(a) \cap W$, ψ heißt Parametrisierung von $U(a) \cap W$. Ohne Angabe von $U(a)$ sagt man auch, daß ϕ und ψ ein lokales Koordinatensystem bzw. eine lokale Parametrisierung in W ist.

Falls W eine m -dimensionale Teilmannigfaltigkeit der Klasse k in $\mathbb{R}^n$ ist, ist $f : W \rightarrow \mathbb{R}^1$ genau dann s -mal stetig differenzierbar ($s \leq k$), wenn für jedes lokale Koordinatensystem ϕ in W $f \circ \phi^{-1}$ s -mal stetig differenzierbar ist.

Sei $\lambda \in I$ und $\Sigma_\lambda := \{x \in \mathbb{R}^n; T(x) = \lambda\}$. Falls $n \geq 2$, ist Σ_λ eine kompakte, $(n-1)$ -dimensionale Teilmannigfaltigkeit

in $\mathbb{R}^n$ der Klasse k_n . Sei $x_0 \in \Sigma_\lambda$ und etwa $\frac{\partial}{\partial x_{v_0}} T(x_0) \neq 0$. Mit der im Beweis zu Lemma 4.3 vorgebrachten Begründung gibt es eine offene, konvexe Umgebung $U(x_0^{(v_0)})$ von $x_0^{(v_0)} = x_{0,\mu}$, $\mu \in \{1, \dots, n\} \setminus \{v_0\}$ in $\mathbb{R}^{n-1}$, eine offene Umgebung $U(\lambda)$ in $\mathbb{R}$ und eine offene Umgebung $U(x_0)$ in $\mathbb{R}^n$, so daß mit $T_{v_0}(x) := (T(x), x^{(v_0)})$ ($T(x)$ steht an der v_0 -ten Stelle) $T_{v_0} : U(x_0) \rightarrow U(\lambda) \times U(x_0^{(v_0)})$ T_{v_0} und $T_{v_0}^{-1}$ k_n -mal stetig differenzierbar sind. Dann ist $T_{v_0}^{-1}(\lambda, U(x_0^{(v_0)})) = U(x_0) \cap \Sigma_\lambda$, also $T_{v_0}^{-1}(U(x_0^{(v_0)})) \cap \Sigma_\lambda$ und $T_{v_0}^{-1}(\lambda, \cdot)$ ein Koordinatensystem bzw. eine Parametrisierung von $U(x_0) \cap \Sigma_\lambda$.¹⁾

Σ_λ ist kompakt, wird also von endlich vielen derartigen Umgebungen $U(x_1), \dots, U(x_m)$ überdeckt; ferner gibt es Funktionen $\varphi_1, \dots, \varphi_m \in C_0^\infty$, so daß $\varphi_\mu \geq 0$, $\text{supp } \varphi_\mu \subset U(x_\mu)$ und $\sum_{\mu=1}^m \varphi_\mu(x) = 1$ ($x \in \Sigma_\lambda$), d.h. $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ bilden eine Partition der Eins in Σ_λ .

Bekanntlich ist dann $L(\Sigma_\lambda)$, wobei L mit dem vom Lebesgue-Maß L in $\mathbb{R}^n$ induzierten Maß w_λ ausgestattet ist, in der folgenden Weise erklärt:

Eine Funktion $f : \Sigma_\lambda \rightarrow \mathbb{C}$ ist genau dann in $L^1(\Sigma_\lambda)$, wenn für jede lokale Parametrisierung ψ $f \circ \psi$ meßbar und integrierbar ist. Das Integral hat den Wert

$$\int_{\Sigma_\lambda} f(w) dw_\lambda = \sum_{\mu=1}^m \int_{U(x_\mu) \cap \Sigma_\lambda} \varphi_\mu(w) f(w) dw_\lambda,$$

wobei das Integral über das Flächenstück $U(x_\mu) \cap \Sigma_\lambda$ in der üblichen Weise mit dem Koordinatensystem T_{v_μ} gebildet wird. Das Integral ist unabhängig von der Überdeckung $U(x_1), \dots, U(x_m)$, den Koordinatensystemen $T_{v_1}, \dots, T_{v_m}$ und

1) Für das Koordinatensystem wird die Bezeichnung T_{v_0} beibehalten, indem $(\lambda, x^{(v_0)})$ mit $x^{(v_0)}$ identifiziert wird.

der Partition der Eins $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ (vgl. [8], S.99). Entsprechendes gilt für $L^2(\Sigma_\lambda)$, der mit $\langle f, g \rangle_{L^2(\Sigma_\lambda)} := \int_{\Sigma_\lambda} f(w) g^*(w) dw_\lambda$ ein separabler Hilbertraum ist.

Falls $n = 1$, ist Σ_λ endlich, also $L^2(\Sigma_\lambda) = A(\Sigma_\lambda, \mathbb{C})$, die Menge der Abbildungen von Σ_λ in $\mathbb{C}$, mit $\|f\|_{L^2(\Sigma_\lambda)}^2 = \sum_{x \in \Sigma_\lambda} |f(x)|^2$ ein separabler Hilbertraum.

Sinngemäße Bemerkungen für $L^2(I \times \Sigma_\lambda)$ erübrigen sich.

Die Zuordnung $L^2(I \times \Sigma_\lambda) \rightarrow L^2(I; L^2(\Sigma_\lambda))$, $f \mapsto h_f : I \rightarrow L^2(\Sigma_\lambda)$, $h_f(\lambda) := f(\lambda, \cdot)$ (L- f.ü. in I), ist unitär. Dabei ist das Integral von h_f als Bochner-Integral zu verstehen (vgl. [24], S.130 ff.). Der Beweis dieser Identifikation folgt aus dem Satz von Fubini und der Separabilität von $L^2(\Sigma_\lambda)$:

Sei $f \in L^2(I \times \Sigma_\lambda)$. Aus dem Satz von Fubini folgt, daß $h_f(\lambda) \in L^2(\Sigma_\lambda)$ (L- f.ü. in I), $\|h_f(\cdot)\|_{L^2(\Sigma_\lambda)} \in L^2(I)$ und $\|f\|_{L^2(I \times \Sigma_\lambda)}^2 = \|h_f\|_{L^2(I; L^2(\Sigma_\lambda))}^2$, also die Isometrie der Zuordnung $f \mapsto h_f$, wenn wir noch zeigen, daß h_f stark meßbar ist. Dies folgt mit dem Satz von Pettis ([24], S.131) aus der schwachen Meßbarkeit von h_f , da $L^2(\Sigma_\lambda)$ separabel ist. Sei dazu $I' \subset I$ ein Intervall und $g \in L^2(\Sigma_\lambda)$. Mit

$$g'(\lambda, w) := \begin{cases} f(\lambda, w), & (\lambda, w) \in I' \times \Sigma_\lambda \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

ist $g' \in L^2(I \times \Sigma_\lambda)$ und mit dem Satz von Fubini folgt die Meßbarkeit von $\langle h_f(\cdot), h_g(\cdot) \rangle_{L^2(\Sigma_\lambda)} = \chi_{I'}(\cdot) \langle h_f(\cdot), g \rangle_{L^2(\Sigma_\lambda)}$ also auch von $\langle h_f(\cdot), g \rangle_{L^2(\Sigma_\lambda)}$.

Sei $g \in L^2(I; L^2(\Sigma_\lambda))$. Es gibt eine Folge $g_m = \sum_{\mu=1}^{k_m} \chi_{I_{m,\mu}} g_{m,\mu}$

$(m, k_m \in \mathbb{N}, g_m, \mu \in L^2(\Sigma_\lambda), I_{m, \mu} \subset I \text{ mit } L(I_{m, \mu}) < \infty, I_{m, \mu} \cap I_{m, \nu} = \emptyset$
 $(\mu \neq \nu))$, so daß $\lim_{m \rightarrow \infty} g_m(\sigma) = g(\sigma)$ in $L^2(\Sigma_\lambda)$ L- f.ü. in I und
 $\lim_{m \rightarrow \infty} \|g - g_m\|_{L^2(I; L^2(\Sigma_\lambda))} = 0$. Mit $h_m(\sigma, w) := g_m(\sigma) \cdot w(\sigma)$ folgt
daraus, daß $g'_m \in L^2(I \times \Sigma_\lambda)$ und $(g'_m)_{m \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge
ist, die gegen ein $g' \in L^2(I \times \Sigma_\lambda)$ konvergiert. Da $h_{g'_m} = g_m$,
ist

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} \|g' - g'_m\|_{L^2(I \times \Sigma_\lambda)}^2 &= \lim_{m \rightarrow \infty} \|h_{g'} - h_{g'_m}\|_{L^2(I; L^2(\Sigma_\lambda))}^2 \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \int_I \|h_{g'}(\sigma) - g_m(\sigma)\|_{L^2(\Sigma_\lambda)}^2 d\sigma = 0. \end{aligned}$$

Ohne Einschränkung (o.E.) (sonst gibt es eine Teilfolge)
gilt demnach $\lim_{m \rightarrow \infty} g_m(\sigma) = h_{g'}(\sigma)$ in $L^2(\Sigma_\lambda)$ L- f.ü. in I ,
also $g = h_{g'}$.

Für das Folgende wird ein $a_I \in I$ festgelegt. Mit diesem a_I
sei dann $\Sigma_I := \Sigma_{a_I}$ und $M_I := L^2(\Sigma_I)$.
(Die Festlegung von a_I erfolgt, um die sonst notwendige
Indizierung mit dem Zeichen a_I wegfallen zu lassen. Man
vergleiche die (durchaus willkürliche) Wahl von $a_I = 1$
in dem Beispiel nach Satz 4.8.)

(4.8) Satz

Sei $\Omega_I := \{x \in \mathbb{R}^n; T(x) \in I\}$. Dann gibt es Abbildungen

$$\Psi_I : \Omega_I \rightarrow M_I$$

$$p_I : I \times \Sigma_I \rightarrow \mathbb{R}_+$$

mit den folgenden Eigenschaften :

- 1) Ψ_I ist ein $(k_n - 1)$ -Diffeomorphismus.

- 2) $\Psi_I(a_I, w) = w \quad (w \in \Sigma_I)$; $\Psi_I(\{\lambda\} \times \Sigma_I) = \Sigma_\lambda \quad (\lambda \in I)$.
- 3) p_I ist $(k_n - 2)$ -mal stetig differenzierbar und bzgl. λ in I $(k_n - 1)$ -mal stetig partiell differenzierbar.
- 4) Durch $(\Gamma_I f)(\lambda)(w) := p_I(\lambda, w)f(\Psi_I(\lambda, w)) \quad ((\lambda, w) \in I \times \Sigma_I)$, $(f \in L^2(\Omega_I))$ wird ein unitärer Operator

$$\Gamma_I : L^2(\Omega_I) \rightarrow L^2(I; L^2(\Sigma_I))$$

definiert.

- 5) Sei $\gamma > 1$. Dann gibt es zu jedem $\lambda \in I$ einen Operator $\tilde{\Gamma}_I(\lambda) \in B(H^{\gamma/2, 2}, L^2(\Sigma_I))$, so daß $\tilde{\Gamma}_I : I \rightarrow B(H^{\gamma/2, 2}, L^2(\Sigma_I))$ lokal hölderstetig ist. In jedem Intervall $I' \subset\subset I$ ist θ , mit $0 < \theta < \min\{(\gamma - 1)/2, 1\}$, wenn $\gamma \leq 3$, und $0 < \theta \leq 1$, wenn $\gamma > 3$, ein zulässiger¹⁾ Hölderexponent für $\tilde{\Gamma}_I(\cdot)$.
- Mit $f \in H^{\gamma/2, 2}$ gilt

$$\tilde{\Gamma}_I(\lambda)f = (\Gamma_I(f|_{\Omega_I}))(\lambda) \quad (L\text{-f.ü. in } I).$$

Das folgende Beispiel verdeutlicht den Inhalt dieses Satzes.

Sei $T(x) := x^2$, also $H_1 = -\Delta$, der Laplace-Operator in L^2 . Man erhält $J = I = (0, \infty)$ und wählt $a_I = 1$, so daß $\Sigma_1 = \{x \in \mathbb{R}^n; |x| = 1\}$, die Einheitssphäre in $\mathbb{R}^n$. Dann ist $\Psi_I(\lambda, w) = \sqrt{\lambda} w$, $p_I(\lambda, w) = (\frac{1}{2} \lambda^{(n/2 - 1)})^{1/2}$, was der bekannten Zerlegung von $x \in \mathbb{R}^n$ in sphärische und radiale Koordinaten entspricht. 1)–4) sind offensichtlich, 5) besagt, daß $f|_{\Sigma_\lambda}$, die "Spur" von f auf Σ_λ bzgl. der Norm in

¹⁾ d.h., wenn θ der folgenden Bedingung genügt, ist $\tilde{\Gamma}_I(\cdot)$ in I' hölderstetig mit dem Hölderexponent θ .

$B(H^{1/2,2}, L^2(\Sigma_1))$ lokal hölderstetig von λ abhängt.

Obwohl der in Satz 4.8 angegebene Sachverhalt bekannt zu sein scheint (Man vergleiche ([11], prop.2.2 und 2.3), wo die Eigenschaft von $T = P$, ein Polynom zu sein, nicht notwendig ist. Bei prop.2.2 wird der Beweis nur skizziert und bei prop.2.3 auf ein nicht näher bezeichnetes "Theorem of trace" verwiesen), soll ein ausführlicher Beweis angegeben werden, der allerdings bzgl. 1) - 4) die Beweisidee von ([11], prop.2.2) verwendet. Er erfolgt in drei Schritten :

- I) Existenz von Ψ_I und Nachweis von 1),2)
- II) Existenz von p_I und Nachweis von 3),4)
- III) Beweis von 5)

zu I :

Sei $I' \subset\subset I$ ein offenes Intervall. Dann ist auch $\Omega_{I'} \subset\subset \Omega_I \subset \mathbb{R}^n \setminus (Z \cup Z_1)$ und mit $F(x) := (|\text{grad } T(x)|^2)^{-1} \text{grad } T(x)$ ($x \in \mathbb{R}^n \setminus (Z \cup Z_1)$) ist die Funktion F in Ω_I $(k_n - 1)$ -mal stetig differenzierbar und in Ω_I , gleichmäßig beschränkt und Lipschitz-stetig. Infolgedessen (vgl.[3], S.10) gibt es eine positive Zahl ϵ_I , so daß für jedes Paar $(\lambda_0, w_0) \in I' \times \bar{\Omega}_I$, genau eine k_n -mal stetig differenzierbare Lösung $\Psi(\cdot, \lambda_0, w_0) : U(\lambda_0, \epsilon_I) := (\lambda_0 - \epsilon_I, \lambda_0 + \epsilon_I) \rightarrow \Omega_I$ der Differentialgleichung (= DGL)

$$(4.9) \quad \frac{d}{d\lambda} \Psi(\lambda) = F(\Psi(\lambda))$$

mit Anfangswert $\Psi(\lambda_0, \lambda_0, w_0) = w_0$ existiert.

Für diese Lösung gilt $\frac{d}{d\lambda} T(\Psi(\lambda, \lambda_0, w_0)) = 1$, also

$$T(\Psi(\lambda, \lambda_0, w_0)) = \lambda + T(w_0) - \lambda_0 \quad (\lambda \in U(\lambda_0, \epsilon_{I'})).$$

Existiert die Lösung $\Psi(\cdot, \lambda_0, w_0)$ im Intervall $I'' \subset I'$ und ist $\lambda_1 \in I''$, kann $\Psi(\cdot, \lambda_0, w_0)$ wegen der eindeutigen Lösbarkeit auf $I'' \cup U(\lambda_1, \epsilon_{I'})$ fortgesetzt werden, falls

$\Psi(\lambda_1, \lambda_0, w_0) \in \Omega_{I'}$; dies ist genau dann der Fall, wenn $\lambda_1 + T(w_0) - \lambda_0 \in I'$, was von der Größe von $|T(w_0) - \lambda_0|$ abhängt. Wenn $w_0 \in \Sigma_{\lambda_0}$, bedeutet das, daß $\Psi(\cdot, \lambda_0, w_0)$ auf ganz I' und, da I durch Intervalle $I' \subset I$ ausgeschöpft werden kann, sogar auf I fortgesetzt werden kann. Zu jedem $\lambda_0 \in I$, $w_0 \in \Sigma_{\lambda_0}$ gibt es demnach genau eine Lösung

$$\Psi(\cdot, \lambda_0, w_0): I \rightarrow \Omega_I, \quad \Psi(\lambda_0, \lambda_0, w_0) = w_0$$

der DGL (4.9) und es gilt $T(\Psi(\lambda, \lambda_0, w_0)) = \lambda \quad (\lambda \in I)$.

Dann sei für jedes $\mu \in I$

$$\Psi_{\mu, I}: I \times \Sigma_{\mu} \rightarrow \Omega_I, \quad \Psi_{\mu, I}(\lambda, w) := \Psi(\lambda, \mu, w).$$

$\Psi_{\mu, I}$ ist bijektiv:

Wenn $\Psi_{\mu, I}(\lambda_1, w_1) = \Psi_{\mu, I}(\lambda_2, w_2)$, folgt $\lambda_1 = T(\Psi_{\mu, I}(\lambda_1, w_1)) = T(\Psi_{\mu, I}(\lambda_2, w_2)) = \lambda_2$. $\Psi_{\mu, I}(\cdot, w_1)$ und $\Psi_{\mu, I}(\cdot, w_2)$ sind Lösungen der DGL (4.9) mit Anfangsdaten $\lambda_0 := \lambda$, $w = w_2$ und $w_0 := \Psi_{\mu, I}(\lambda_0, w_1) = \Psi_{\mu, I}(\lambda_0, w_2)$, folglich gleich. Damit ist $w_1 = \Psi_{\mu, I}(\mu, w_1) = \Psi_{\mu, I}(\mu, w_2) = w_2$ und $\Psi_{\mu, I}$ injektiv.

Sei $w_1 \in \Omega_{I'}$. Mit $\mu_1 := T(w_1)$ gilt $T(\Psi_{\mu_1, I}(\mu, w_1)) = \mu$ und $w_2 := \Psi_{\mu_1, I}(\mu, w_1) \in \Sigma_{\mu}$, also $\Psi_{\mu, I}(\mu, w_2) = \Psi_{\mu_1, I}(\mu, w_1)$. Wegen der eindeutigen Lösbarkeit folgt wieder $\Psi_{\mu, I}(\cdot, w_2) = \Psi_{\mu_1, I}(\cdot, w_1)$, folglich $w_1 = \Psi_{\mu, I}(\mu_1, w_2)$ und $\Psi_{\mu, I}$ surjektiv.

$\Psi_{\mu, I}$ und $\Psi_{\mu, I}^{-1}$ sind $(k_n - 1)$ -mal stetig differenzierbar :

Sei $w \in \Sigma_\mu$. Mit Hilfe des oben erwähnten Fortsetzungsverfahrens für Lösungen der DGL (4.9) erhält man ein offenes Intervall $U(\mu, \delta_w)$ und eine offene Umgebung $U(w)$ in $\mathbb{R}^n$, so daß für jedes Paar $(\lambda_1, w_1) \in U(\mu, \delta_w) \times U(w)$ die DGL (4.9) genau eine Lösung $\Psi(\cdot, \lambda_1, w_1) : U(\mu, \delta_w) \rightarrow \Omega_I$ mit $\Psi(\lambda_1, \lambda_1, w_1) = w_1$ hat. Mit ([5], Kap.V.4) erhält man, daß die Abbildung

$$\Psi(\cdot, \cdot, \cdot) : U(\mu, \delta_w) \times U(\mu, \delta_w) \times U(w) \rightarrow \Omega_I$$

$(k_n - 1)$ -mal stetig differenzierbar ist, weil F $(k_n - 1)$ -mal stetig differenzierbar ist. Da $\Psi_{\mu, I}|_{U(\mu, \delta_w) \times (U(w) \cap \Sigma_\mu)} = \Psi(\cdot, \mu, \cdot)|_{U(\mu, \delta_w) \times (U(w) \cap \Sigma_\mu)}$ folgt damit die $(k_n - 1)$ -malige stetige Differenzierbarkeit von $\Psi_{\mu, I}$ in $U(\mu, \delta_w) \times (U(w) \cap \Sigma_\mu)$.

O.E. ist T_1 auf $U(w) \cap \Sigma_\mu$ ein Koordinatensystem. $V(w')$ und $U(\mu, \delta_w')$ sind die zu T_1 gehörenden Umgebungen von $w' = (w_2, \dots, w_n)$ in $\mathbb{R}^{n-1}$ bzw. μ in $\mathbb{R}$ (vgl.S.57). Mit $\delta_w := \min\{\delta_w, \delta_w'\}$ ist dann $\phi_w : U(\mu, \delta_w) \times V(w') \rightarrow \Omega_I$, $\phi_w(\lambda, y') := \Psi_{\mu, I}(\lambda, T_1^{-1}(\mu, y'))$ $(k_n - 1)$ -mal stetig differenzierbar. Da $\phi_w(\mu, y') = T_1^{-1}(\mu, y')$ gilt $\text{Det}(D\phi_w(\mu, w')) \neq 0$:

Aus $(DT_1(w)) \circ (DT_1^{-1}(\mu, w')) = \text{id}_{\mathbb{R}^n}$ erhält man

$\langle (\text{grad } T(w)), (D_{y_v} T_1^{-1}(\mu, w')) \rangle_{\mathbb{R}^n} = 0$ ($2 \leq v \leq n$). Falls die Determinante verschwindet, ist $\frac{\partial}{\partial \lambda} \Psi_{\mu, I}(\lambda, w', w') = \frac{\partial}{\partial \lambda} \Psi_{\mu, I}(\lambda, w', w') = (|\text{grad } T(w)|^2)^{-1} \text{grad } T(w)$ eine Linearkombination der Vektoren $D_{y_v} T_1^{-1}(\mu, w')$ ($2 \leq v \leq n$), was wegen $\text{grad } T(w) \neq 0$ nicht sein kann.

Aus dem Satz über implizite Funktionen folgt damit

die Existenz einer Umgebung $U'(w)$ von $\phi_w^{-1}(w, w') = w$ auf der $\phi_w^{-1} : (k_n - 1)$ -mal stetig differenzierbar ist. o.E. sei $U'(w)$ so gewählt, daß $\phi_w^{-1}(U'(w))$ die Form $U(\mu, \tau_w') \times V'(w')$ hat ($\delta_w' \leq \delta_w$, $V'(w') \subset V(w')$).

Man verifiziert leicht, daß für $x \in U'(w)$ und $(\lambda, y') := \phi_w^{-1}(x)$ $\Psi_{\mu, I}^{-1}(x) = (\lambda, T_1^{-1}(\mu, y'))$, so daß $\Psi_{\mu, I}^{-1} = (\cdot, T_1^{-1}(\mu, \cdot)) \circ \phi_w^{-1}$ auf $U'(w)$ $(k_n - 1)$ -mal stetig differenzierbar ist.

Σ_μ ist kompakt; infolgedessen gibt es ein $m \in \mathbb{N}$ und $w_1, \dots, w_m \in \Sigma_\mu$, so daß Σ_μ von den Umgebungen $U'(w_i)$ ($1 \leq i \leq m$) überdeckt wird. Betrachtet man die Wirkung von $\Psi_{\mu, I}^{-1}$ auf $U'(w_1)$, folgt daraus die Existenz einer positiven Zahl δ_μ , so daß $\Psi_{\mu, I} : U(\mu, \delta_\mu) \times \Sigma_\mu \rightarrow \Sigma_\mu$ ein $(k_n - 1)$ -Diffeomorphismus auf $U(\mu, \delta_\mu)$ ist.

Gleichzeitig erhält man, da $\Psi_{\mu, I}(\{\lambda\} \times \Sigma_\mu) = \Sigma_\mu$, daß für jedes $\lambda \in U(\mu, \delta_\mu)$ die Abbildung $\Psi_{\mu, I}(\lambda, \cdot) : \Sigma_\mu \rightarrow \Sigma_\lambda$ ein $(k_n - 1)$ -Diffeomorphismus ist.

Für jedes $\mu' \in I$, $w \in \Sigma_\mu$ sind $\Psi_{\mu, I}(\cdot, w)$ und $\Psi_{\mu', I}(\cdot, \Psi_{\mu, I}(\mu', w))$ Lösungen der DGL (4.9) mit $\lambda_0 := \mu'$ und $w_0 := \Psi_{\mu, I}(\mu', w)$, folglich gleich. Das heißt

$$\Psi_{\mu, I}(\lambda, w) = \Psi_{\mu', I}(\lambda, \Psi_{\mu, I}(\mu', w)) \quad ((\lambda, w) \in I \times \Sigma_\mu)$$

und

$$(\Psi_{\mu, I}(\lambda, \cdot))^{-1} = \Psi_{\lambda, I}(\mu, \cdot) : \Sigma_\lambda \rightarrow \Sigma_\mu \quad (\lambda, \mu \in I),$$

woraus folgt, daß für jedes $\lambda \in I$ $\Psi_{\mu, I}(\lambda, \cdot)$ ein $(k_n - 1)$ -Diffeomorphismus von Σ_μ auf Σ_λ ist :

a) Sei $\mu' > \mu$ (o.E.) und $U(\mu, \delta_\mu) \cap U(\mu', \delta_{\mu'}) \neq \emptyset$.

Mit $\mu'' \in U(\mu, \delta_\mu) \cap U(\mu', \delta_{\mu'})$ gilt dann

$$\begin{aligned}\Psi_{\mu, I}(\mu', w) &= \Psi_{\mu'', I}(\mu', \Psi_{\mu, I}(\mu'', w)) \\ &= \Psi_{\mu'', I}(\mu', \cdot) \circ \Psi_{\mu, I}(\mu'', \cdot)(w) \quad (w \in \Sigma_\mu)\end{aligned}$$

und $\Psi_{\mu, I}(\mu', \cdot)$ ist $(k_n - 1)$ -Diffeomorphismus von Σ_μ auf $\Sigma_{\mu'}$.

b) Sei $\mu' > \mu$ (o.E.) und $U(\mu, \delta_\mu) \cap U(\mu', \delta_{\mu'}) = \emptyset$.

Mit Anfangspunkt μ und Endpunkt μ' wird das Intervall $[\mu, \mu']$ derart von endlich vielen Intervallen $U(\mu_1, \delta_{\mu_1})$ überdeckt, daß $\mu = \mu_1 < \dots < \mu_l < \dots < \mu_k = \mu'$ und jeweils $U(\mu_1, \delta_{\mu_1}) \cap U(\mu_{l+1}, \delta_{\mu_{l+1}}) \neq \emptyset$. Wie in a) wird $\Psi_{\mu, I}(\mu', \cdot)$ fortlaufend in $(k_n - 1)$ -Diffeomorphismen von Σ_{μ_1} auf $\Sigma_{\mu_{l+1}}$ ($1 \leq l \leq k$) zerlegt, ist also ein $(k_n - 1)$ -Diffeomorphismus von Σ_μ auf $\Sigma_{\mu'}$.

Mit diesen Überlegungen folgt schließlich, daß

$\Psi_{\mu, I} : I \times \Sigma_\mu \rightarrow \Omega_I$ ein $(k_n - 1)$ -Diffeomorphismus ist, da für jedes $\mu' \in I$ mit $h_{\mu, \mu'}(\lambda, w) := (\lambda, \Psi_{\mu, I}(\mu', w))$

$$\Psi_{\mu, I}(\lambda, w) = (\Psi_{\mu', I} \circ U(\mu', \delta_{\mu'}) \times \Sigma_{\mu'} \circ h_{\mu, \mu'})(\lambda, w)$$

$$((\lambda, w), \Psi_{\mu, I}(\mu', \cdot)) = (\lambda, \Psi_{\mu, I}(\mu', w)).$$

Damit hat $\Psi_I := \Psi_{\Omega_I, I}$ die in Satz 4.8, 1), 2) verlangten Eigenschaften.

zu II :

Aus dem bisher Bewiesenen folgt für jedes $x \in \Omega_I$ die Existenz einer offenen Umgebung $U(x)$ in $\mathbb{R}^n$, offener Umgebungen $U(u_x, \zeta_x) = U(u_x)$ in I und $U(w_x)$ in $\mathbb{R}^n$, wenn

$(\mu_x, w_x) := \Psi_I^{-1}(x) \in I \times \Sigma_I$, dazu die Existenz eines Koordinatensystems T_{ν_x} ($\nu_x \in \{1, \dots, n\}$ geeignet) auf $U(w_x) \cap \Sigma_I$ mit einer offenen Umgebung $U(w'_x)$ von $w'_x := T_{\nu_x}(w_x)$ in $\mathbb{R}^{n-1}$, so daß

$$\phi_x : U(\mu_x) \times U(w'_x) \rightarrow U(x),$$

$$\phi_x(\lambda, y') := \Psi_I(\lambda, T_{\nu_x}^{-1}(a_I, y')) \quad \begin{array}{l} \lambda \in U(\mu_x) \\ y' \in U(w'_x) \end{array}$$

ein $(k_n - 1)$ -Diffeomorphismus ist. Dann sei für $(\lambda, w) \in I \times \Sigma_I$

$$p_I(\lambda, w) := |\text{Det}(D_{(\lambda, y')} \phi_x(\lambda, y'))|^{1/2} \cdot$$

$$\cdot |\text{Det}(\langle D_{y'_j} T_{\nu_x}^{-1}(a_I, y'), D_{y'_e} T_{\nu_x}^{-1}(a_I, y') \rangle_{\mathbb{R}^n})|^{-1/4},$$

$\mathbb{R}^n, e \in \{1, \dots, n\} \setminus \{\nu_x\}$

wenn für $x := \Psi_I(\lambda, w)$ $\mu_x = \lambda$, $w_x = w$ und mit einem $y' \in U(w'_x)$ $w = T_{\nu_x}^{-1}(a_I, y')$.

Da jeweils ϕ_x ein $(k_n - 1)$ -Diffeomorphismus ist, ist der erste Faktor von $p_I(\lambda, w)$ positiv, der zweite ebenfalls, da jeweils T_{ν_x} ein lokales Koordinatensystem der $(n-1)$ -dimensionalen Teilmannigfaltigkeit Σ_I der Klasse k_n ist, so daß die Matrix $D_{y'} T_{\nu_x}^{-1}(a_I, y')$ den Rang $n-1$ hat und der zweite Faktor von $p_I(\lambda, w)$ im wesentlichen die Gram'sche Determinante aus $n-1$ linear unabhängigen Vektoren ist. Ferner ist p_I $(k_n - 2)$ -mal stetig differenzierbar und bzgl. λ $(k_n - 1)$ -mal stetig partiell differenzierbar, wenn man beachtet, daß $\phi_x(\cdot, y')$ Lösung der DGL (4.9) ist.

Mit einigem Rechenaufwand verifiziert man schließlich, daß die Definition von $p_I(\lambda, w)$ von den lokalen Koordinatensystemen auf Σ_I unabhängig ist. (Man vergleiche die in

etwa ähnliche Rechnung bei dem Nachweis der Unabhängigkeit des Oberflächenintegrals von Koordinatensystemen)

Sei jetzt $f \in L^2(\Omega_I)$, f stetig. Aufgrund der Transformationsformel für die Integration folgt für jedes $x \in \Omega_I$

$$\begin{aligned}
 & \int_{U(x)} |f(y)|^2 dy = \\
 &= \int_{U(x) \cap U(w'_x)} |f(\phi_x(\lambda, y'))|^2 |\text{Det}(D_{(\lambda, y')} \phi_x(\lambda, y'))| d(\lambda, y') \\
 &= \int_{U(\mu_x) \cap U(w'_x)} |f(\phi_x(\lambda, y'))|^2 |p_I(\lambda, T_{v_x}^{-1}(a_I, y'))|^2 \cdot \\
 &\quad \cdot |\text{Det}(\langle D_{y'_p} T_{v_x}^{-1}(a_I, y'), D_{y'_e} T_{v_x}^{-1}(a_I, y') \rangle_{\mathbb{R}^n})_{j, e \in \{1, \dots, n\} \setminus \{v'_x\}}|^{1/2} d(\lambda, y') \\
 &= \int_{U(\mu_x) \cap U(w'_x) \cap \Gamma_I} |p_I(\lambda, w) f(\Psi_I(\lambda, w))|^2 d(\lambda, w) \\
 &= \int_{U(\mu_x)} \left[\int_{U(w'_x) \cap \Gamma_I} |p_I(\lambda, w) f(\Psi_I(\lambda, w))|^2 dw \right] d\lambda.
 \end{aligned}$$

Sei $\mu \in I$. Σ_μ ist kompakt und wird deshalb durch endlich viele Umgebungen $U(x_1), \dots, U(x_m)$ ($x_1, \dots, x_m \in \Sigma_\mu$) überdeckt. Infolgedessen wird Σ_I von den Umgebungen $U(w_{x_1}), \dots, U(w_{x_m})$ überdeckt, die eine Partition der Eins auf Σ_I liefern (vgl. S.57) bestehend aus $\varphi_1, \dots, \varphi_m$. Mit $\varepsilon := \min\{\delta_{x_k}; 1 \leq k \leq m\}$ gilt dann :

$$\begin{aligned}
 & \int_{U(\mu, \varepsilon)} \left[\int_{\Sigma_I} |p_I(\lambda, w) f(\Psi_I(\lambda, w))|^2 dw \right] d\lambda \\
 &= \sum_{k=1}^m \int_{U(\mu, \varepsilon) \cap U(w_{x_k}) \cap \Gamma_I} \varphi_k(w) |p_I(\lambda, w) f(\Psi_I(\lambda, w))|^2 dw d\lambda
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^m \int_{\phi_{x_k}(U(\mu, \varepsilon) \times U(w'_{x_k}))} \varphi_k(\text{pr}_{\Sigma_I}(\psi_I^{-1}(y))) |f(y)|^2 dy \\
&= \int_{\Omega_{U(\mu, \varepsilon)}} |f(y)|^2 dy,
\end{aligned}$$

denn man sieht mit Hilfe der Eigenschaften von $\varphi_1, \dots, \varphi_m$, der Partition der Eins in Σ_I , daß für $y \in \mathbb{R}^n$

$$\chi_{\Omega_{U(\mu, \varepsilon)}}(y) = \sum_{k=1}^m \chi_{\phi_{x_k}(U(\mu, \varepsilon) \times U(w'_{x_k}))}(y) \varphi_k(\text{pr}_{\Sigma_I}(\psi_I^{-1}(y))).$$

Da Σ_λ ($\lambda \in I$) eine L-Nullmenge ist, ist I und Ω_I bis auf eine L-Nullmenge abzählbare Vereinigung disjunkter Mengen vom Typ $U(\mu, \varepsilon)$ bzw. $\Omega_{U(\mu, \varepsilon)}$. Infolgedessen gilt

$$\int_I \left[\int_{\Sigma_I} |p_I(\lambda, w) f(\psi_I(\lambda, w))|^2 dw \right] d\lambda = \int_{\Omega_I} |f(y)|^2 dy.$$

Damit sieht man, daß durch $(\Gamma_I f)(\lambda)(w) := p_I(\lambda, w) f(\psi_I(\lambda, w))$ ein isometrischer Operator

$$\Gamma_I : (\{f \in L^2(\Omega_I); f \text{ stetig}\}, \|\cdot\|_{L^2(\Omega_I)}) \rightarrow L^2(I; \mathbb{M}_I)$$

definiert ist. $\{f \in L^2(\Omega_I); f \text{ stetig}\}$ ist dicht in $L^2(\Omega_I)$; es existiert daher eine eindeutig bestimmte isometrische Fortsetzung $\Gamma_I : L^2(\Omega_I) \rightarrow L^2(I; \mathbb{M}_I)$.

Umgekehrt ist $\{f \in L^2(I \times \Sigma_I); f \text{ stetig}\}$ dicht in $L^2(I \times \Sigma_I)$.

Mit $g(x) := f(\psi_I^{-1}(x))$ ($x \in \Omega_I$) sieht man aufgrund der vorangegangenen Rechnung, daß $g \in L^2(\Omega_I)$, $\|g\|_{L^2(\Omega_I)} = \|f\|_{L^2(I \times \Sigma_I)}$ und $h_f = \Gamma_I g$. Zusammen mit den Bemerkungen über $L^2(I \times \Sigma_I)$ und $L^2(I; \mathbb{M}_I)$ folgt daraus durch Fortsetzung auf $L^2(I \times \Sigma_I)$, daß Γ_I unitär ist.

(4.10) Bemerkung

Sei $I' \subset\subset I$ ein offenes Intervall. Entsprechend den Ausführungen zu Satz 4.8, 1)-4) erhält man, daß durch

$(\Gamma_I, f)(\lambda)(w) := p_I(\lambda, w) f(\Psi_I(\lambda, w))$ ($(\lambda, w) \in I' \times \Sigma_I$, $f \in L^2(\Omega_I)$, f stetig) ein unitärer Operator $\Gamma_I: L^2(\Omega_I) \rightarrow L^2(I'; \mathbb{M}_I)$ definiert ist.

Sei $f \in L^2(\Omega_I)$ und $g: \Omega_I \rightarrow \mathbb{C}$ stetig. Dann gilt

$$\begin{aligned} g(\Psi_I(\lambda, \cdot))(\Gamma_I f)(\lambda) &= g(\Psi_I(\lambda, \cdot))(\Gamma_I(\chi_{\Omega_I} f))(\lambda) \\ &= (\Gamma_I(\chi_{\Omega_I} g f))(\lambda) \quad (L\text{-f.ü. in } I'). \end{aligned}$$

Beweis

g ist stetig, Σ_λ kompakt, folglich ist $g(\Psi_I(\lambda, \cdot)) \in L^\infty(\Sigma_I)$ ($\lambda \in I$). Wenn f stetig ist, ist nichts mehr zu zeigen.

Andernfalls gibt es eine Folge $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in $L^2(\Omega_I)$, so daß f_k stetig, $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k = f$ in $L^2(\Omega_I)$ und $\lim_{k \rightarrow \infty} \chi_{\Omega_I} f_k = \chi_{\Omega_I} f$ in $L^2(\Omega_I)$; ferner gilt $\lim_{k \rightarrow \infty} (\Gamma_I f_k)(\lambda) = (\Gamma_I f)(\lambda)$ in $\mathbb{M}_I$ L -f.ü. in I und $\lim_{k \rightarrow \infty} (\Gamma_I \chi_{\Omega_I} g f_k)(\lambda) = (\Gamma_I \chi_{\Omega_I} g f)(\lambda)$ bzw. $\lim_{k \rightarrow \infty} (\Gamma_I \chi_{\Omega_I} f_k)(\lambda) = (\Gamma_I \chi_{\Omega_I} f)(\lambda)$ in $\mathbb{M}_I$ L -f.ü. in I' . Dies zeigt die Behauptung.

zu III :

Zunächst wird auf den Begriff der Interpolation zwischen zwei Hilberträumen verwiesen ([13], S.11 ff., [18], S.18 ff.):

Wenn $\mathbb{H}_0$ und $\mathbb{H}_1$ zwei Hilberträume sind, so daß $\mathbb{H}_0 \subset \mathbb{H}_1$, $\mathbb{H}_0$ dicht in $\mathbb{H}_1$ ist und $\|u\|_{\mathbb{H}_1} \leq c \|u\|_{\mathbb{H}_0}$ ($u \in \mathbb{H}_0$) mit einer Konstanten c , bezeichnet $\mathbb{H}_\theta := [\mathbb{H}_0, \mathbb{H}_1]_\theta$ ($\theta \in [0, 1]$) den

Interpolationsraum zwischen H_0 und H_1 zum Wert θ . Es gilt der wichtige Interpolationssatz (vgl. [13], S.31, [18], S.21):

(4.11) Satz

Seien H_0, H_1 bzw. $\tilde{H}_0, \tilde{H}_1$ zwei Paare von Hilberträumen mit den obengenannten Eigenschaften. Sei $K \in B(H_1, \tilde{H}_1)$, so daß mit $u \in H_0$ $Ku \in \tilde{H}_0$ und $K|_{H_0} \in B(H_0, \tilde{H}_0)$ oder kurz $K \in B(H_1, \tilde{H}_1) \cap B(H_0, \tilde{H}_0)$. Dann ist für jedes $\theta \in [0, 1]$

$$K \in B([H_0, H_1]_\theta, [\tilde{H}_0, \tilde{H}_1]_\theta)$$

und mit $M_0 := \|K\|_{B(H_0, \tilde{H}_0)}$, $M_1 := \|K\|_{B(H_1, \tilde{H}_1)}$ gilt

$$\|Ku\|_{[\tilde{H}_0, \tilde{H}_1]_\theta} \leq M_0^{1-\theta} M_1^\theta \|u\|_{[H_0, H_1]_\theta} \quad (u \in [H_0, H_1]_\theta).$$

In $L^2(\mathbb{R}; M_I)$ ist ebenfalls eine Fouriertransformation

$$u \mapsto \hat{f}u, \quad (\hat{f}u)(t) := (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-it\lambda} u(\lambda) d\lambda$$

gegeben, die ein unitärer Isomorphismus in $L^2(\mathbb{R}; M_I)$ ist (vgl. [13], S.19, [21], S.45; das obige Integral ist in der üblichen Weise zu interpretieren).

Sei $k \in \mathbb{N}$, I' ein offenes Intervall, $I' \subset\subset I$, $\tilde{I} \in \{I', \mathbb{R}\}$.

$$W^k(\tilde{I}; M_I) := \{u \in L^2(\tilde{I}; M_I); u^{(k)} \in L^2(\tilde{I}; M_I)\}$$

($u^{(k)}$ ist die k -te Ableitung im Distributionssinn (vgl. [13], S.8)) ist mit der Norm

$$(4.12) \quad [\|u\|_{L^2(\tilde{I}; M_I)}^2 + \|u^{(k)}\|_{L^2(\tilde{I}; M_I)}^2]^{1/2}$$

ein Hilbertraum.

(4.13) Lemma

1) $W^k(\tilde{I}; M_I) = \{u \in L^2(\tilde{I}; M_I); u^{(j)} \in L^2(\tilde{I}; M_I) \ (1 \leq j \leq k)\}$.

Die Norm (4.12) in $W^k(\tilde{I}; M_I)$ ist äquivalent zu der Norm

$$(4.14) \quad \left[\sum_{j=0}^k \|u^{(j)}\|_{L^2(\tilde{I}; M_I)}^2 \right]^{1/2} \quad (u^{(0)} := u)$$

2) Die Abbildung $\tilde{u}_I : W^k(R; M_I) \rightarrow W^k(I'; M_I)$, $u \mapsto u|_{I'}$, ist linear und stetig.

3) Es gibt eine stetige, lineare Einbettung

$\mathcal{E}_I : W^k(I'; M_I) \rightarrow W^k(R; M_I)$, so daß $(\mathcal{E}_I, u)(\lambda) = u(\lambda)$ (L-f.ü. in I').

Beweis

1) folgt aus ([13], Kap.1, Theorem 2.3), da mit $X := Y := M_I$ $[X, Y]_\theta = Y \ (0 \in [0, 1])$.

2) ist offensichtlich und 3) erhält man aus ([13], Kap.1, Theorem 2.2).

Weiterhin gilt (vgl. [13], S.20)

$$W^k(R; M_I) = \{u \in L^2(R; M_I); |\cdot|^k \frown u \in L^2(R; M_I)\}$$

und die Norm $\|u\|_{W^k(R; M_I)} := \|(1 + |\cdot|^2)^{k/2} \frown u\|_{L^2(R; M_I)}$ ist äquivalent zu der Norm (4.12), wenn $I = R$.

Mit $s \geq 0$ ist

$$W^s(R; M_I) := \{u \in L^2(R; M_I); (1 + |\cdot|^2)^{s/2} \frown u \in L^2(R; M_I)\}$$

mit der Norm $\|u\|_{W^s(R; M_I)} := \|(1 + |\cdot|^2)^{s/2} \frown u\|_{L^2(R; M_I)}$ ein Hilbertraum. Mit der gleichen Begründung wie in

([13], Kap. 1, § 7.1) gilt, wenn $W^0(R; M_I) := L^2(R; M_I)$,

$$[W^k(R; M_I), W^0(R; M_I)]_\theta = W^{(1-\theta)k}(R; M_I) \quad (0 \leq \theta \leq 1)$$

und die Normen sind äquivalent.

$W^k(I'; M_I)$ ist ein in $L^2(I'; M_I)$ dichter Teilraum, die Einbettung ist stetig, infolgedessen ist mit $W^s(I'; M_I) := L^2(I'; M_I)$

$$W^s(I'; M_I) := \{W^k(I'; M_I), W^0(I'; M_I)\} \quad ((1-\theta)ks \in [0, 1])$$

wohldefiniert. Mit der gleichen Begründung wie in ([13], Kap. 1, § 9) sieht man, daß die Definition von k und θ unabhängig ist, solange nur $(1-\theta)k = s$. Insbesondere gilt :

(4.15) Lemma

Mit $\mathcal{E}_I, \pi_I$ aus Lemma (4.13) ist, wenn $s \geq 0$,

- 1) $\mathcal{E}_I \in B(W^s(I'; M_I), W^s(R; M_I))$
- 2) $\pi_I \in B(W^s(R; M_I), W^s(I'; M_I))$
- 3) $\pi_I \mathcal{E}_I u = u, u \in W^s(I'; M_I)$, d.h. $(\mathcal{E}_I u)(\lambda) = u(\lambda)$ l- f.ü. in I' .

Für $\Omega := \Omega_I$, bleiben die Ergebnisse aus ([13], Kap. 1, § 8, 9) in einem begrenzten Umfang erhalten, obwohl der Rand von Ω_I , nur aus $(n-1)$ -dimensionalen Oberflächenstücken der Klasse k_n besteht (vgl. [13], Kap. 1, 7.10, 7.11) :

(4.16) Lemma

- 1) $H^{k,2}(\Omega_I) = \overline{\{v|_{\Omega_I}; v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)\}}^{H^{k,2}(\mathbb{R}^n)}$ ($k \in \mathbb{N}$).
- 2) Es gibt, wenn $k \leq k_n$, eine stetige, lineare Einbettung

$\mathcal{E}_{\Omega_I} : H^{k,2}(\Omega_I) \rightarrow H^{k,2}$, so daß $(\mathcal{E}_{\Omega_I} u)(x) = u(x)$
 L-f.ü. in Ω_I .

3) Die Abbildung $\mathcal{T}_{\Omega_I} : H^{k,2} \rightarrow H^{k,2}(\Omega_I)$, $u \mapsto u|_{\Omega_I}$, ist
 für jedes $k \in \mathbb{N}$ linear und stetig.

Beweis

zu 1) : Ω_I hat die Segment-Eigenschaft ([1], S.11) d.h. es
 gibt eine lokal-endliche offene Überdeckung $\{O_j\}_{j \in M}$ von
 $\text{Rd } \Omega_I$, und zugehörige Vektoren $y_j \in \mathbb{R}^n$ ($j \in M$), so daß
 $x + ty_j \in \Omega_I$, wenn $x \in O_j \cap \overline{\Omega_I}$, $0 < t < 1$ ($j \in M$). Die Behaup-
 tung folgt dann aus ([1], Theorem 2.1).

Daß Ω_I die Segment-Eigenschaft hat, sieht man folgender-
 maßen :

Sei $x_0 \in \text{Rd } \Omega_I = \Sigma_a \cup \Sigma_{b'}$, ($a' < b'$, $a', b' \in I$ geeignet).

O.E. sei $x_0 \in \Sigma_a$, und $\frac{\partial}{\partial x_1} T(x_0) > 0$. Dann gibt es eine Umge-
 bung $U(x_0)$ in $\mathbb{R}^n$ und eine positive Zahl α_0 , so daß mit

$e_1 := (1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$, $y_0 := \alpha_0 e_1$, $x \in U(x_0)$ und $0 \leq t \leq 1$

$T(x + ty_0) < b'$ und $\frac{\partial}{\partial x_1} T(x + ty_0) > 0$. Wenn $x \in U(x_0) \cap \overline{\Omega_I}$, und

$0 < t < 1$, erhält man mit dem Mittelwertsatz ein $t' \in (0, t)$,

so daß $T(x + ty_0) - a' = T(x + ty_0) - T(x) + T(x) - a' =$

$\alpha_0 t \frac{\partial}{\partial x_1} T(x + t'y_0) + T(x) - a' \geq \alpha_0 t \frac{\partial}{\partial x_1} T(x + t'y_0) > 0$,

also $x + ty_0 \in \Omega_I$. Als kompakte Menge wird $\text{Rd } \Omega_I$ von endlich

vielen Umgebungen vom Typ $U(x_0)$ überdeckt, woraus die

Segment-Eigenschaft folgt.

Zum Nachweis von 2) läßt sich der Beweis zu ([13], Kap.1,

Theorem 8.1) wörtlich übertragen; die Behauptung in 3)

ist evident.

Für $0 \leq s \leq k \leq k_n$ ($k \in \mathbb{N}$) sei mit $H^{0,2}(\Omega_I) := L^2(\Omega_I)$

$$H^{s,2}(\Omega_I) := \{u \in L^2(\Omega_I) : (1-\theta)k = s, \theta \in [0,1]\}.$$

Wie in ([13], Kap. 1, §9.1) folgt, daß die Definition von k, θ unabhängig ist, solange nur $(1-\theta)k = s$. Falls $s \in \mathbb{N}$, stimmt $H^{s,2}(\Omega_I)$ mit der üblichen Definition (bei äquivalenten Normen) überein. Mit der gleichen Begründung wie in ([13], Kap. 1, §9.1) folgt

(4.17) Lemma

Mit $\mathcal{E}_{\Omega_I}, \pi_{\Omega_I}$ aus Lemma 4.16 und $0 \leq s \leq k_n$ gilt :

- 1) $\mathcal{E}_{\Omega_I} \in B(H^{s,2}(\Omega_I), H^{s,2})$
- 2) $\pi_{\Omega_I} \in B(H^{s,2}, H^{s,2}(\Omega_I))$
- 3) $\pi_{\Omega_I} \mathcal{E}_{\Omega_I} u = u$ ($u \in H^{s,2}(\Omega_I)$), d.h. $(\mathcal{E}_{\Omega_I} u)(x) = u(x)$ für $x \in \Omega_I$.

(4.18) Lemma

Sei $s > 1/2$. Dann gibt es zu jedem $\lambda \in \mathbb{R}$ einen Operator $\hat{\Gamma}_I : W^s(\mathbb{R}; M_I, M_I) \rightarrow W^s(\mathbb{R}; M_I, M_I)$, so daß $\hat{\Gamma}_I(\lambda u) = u$ f.ä. in $\mathbb{R}$, $u \in W^s(\mathbb{R}; M_I)$. Die Abbildung

$$\hat{\Gamma}_I(\cdot) : \mathbb{R} \rightarrow B(W^s(\mathbb{R}; M_I, M_I), W^s(\mathbb{R}; M_I, M_I)), \lambda \mapsto \hat{\Gamma}_I(\lambda),$$

ist gleichmäßig hölderstetig in $\mathbb{R}$. Jede Zahl θ , für die $0 < \theta < \min\{s - 1/2, 1\} =: \gamma_s$, wenn $s \leq 3/2$, und $0 < \theta \leq 1$, wenn $s > 3/2$, ist ein zulässiger Hölderexponent für $\hat{\Gamma}_I(\cdot)$.

Beweis

$C_0^\infty(\mathbb{R}; M_I)$, die Menge der beliebig differenzierbaren Funk-

tionen $u: \mathbb{R} \rightarrow M_I$, die kompakten Träger haben, ist dicht in $W^s(\mathbb{R}; M_I)$. Für $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}; M_I)$ gilt

$$u(\lambda) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} (\mathcal{F}u)(t) dt \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

und mit $v(t) := (1+|t|^2)^{s/2} (\mathcal{F}u)(t)$ ist $v \in L^2(\mathbb{R}; M_I)$. Ferner ist $|e^{it\lambda} - e^{it\lambda'}| \leq |\lambda - \lambda'| (1+|t|^2)^{1/2}$ ($\lambda, \lambda', t \in \mathbb{R}$), also $|e^{it\lambda} - e^{it\lambda'}| \leq 2|\lambda - \lambda'| \gamma_{s-\varepsilon}^{-1} (1+|t|^2)^{(\gamma_{s-\varepsilon}-1)/2}$ für jedes ε mit $0 < \varepsilon \leq \gamma_s$. Daraus folgt

$$\begin{aligned} & \|u(\lambda) - u(\lambda')\|_{M_I} \\ & \leq (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} |e^{it\lambda} - e^{it\lambda'}| (1+|t|^2)^{s/2} \|v(t)\|_{M_I} dt \\ & \leq (2\pi)^{-1/2} |\lambda - \lambda'| \gamma_{s-\varepsilon}^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} (1+|t|^2)^{(\gamma_{s-\varepsilon}-1)/2} \|v(t)\|_{M_I} dt \\ & \leq c |\lambda - \lambda'| \gamma_{s-\varepsilon}^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} (1+|t|^2)^{s/2} \|v(t)\|_{M_I} dt \end{aligned}$$

Da $\gamma_{s-\varepsilon} < -1/2$, erhält man mit einer Konstanten $c_{s,\varepsilon}$

$$\|u(\lambda) - u(\lambda')\|_{M_I} \leq c_{s,\varepsilon} |\lambda - \lambda'| \gamma_{s-\varepsilon}^{-1} \|u\|_{W^s(\mathbb{R}; M_I)}.$$

Falls $s > 3/2$, setzt man 1 statt $\gamma_{s-\varepsilon}$ und erhält mit der gleichen Abschätzung, da $1-s < -1/2$,

$$\|u(\lambda) - u(\lambda')\|_{M_I} \leq c_{s,\varepsilon} |\lambda - \lambda'| \|u\|_{W^s(\mathbb{R}; M_I)}.$$

Die linearen Abbildungen $C_0^\infty(\mathbb{R}; M_I) \rightarrow M_I$, $u \mapsto u(\lambda)$, ($\lambda \in \mathbb{R}$) haben demnach stetige Fortsetzungen $\hat{\Gamma}_I(\lambda) \in B(W^s(\mathbb{R}; M_I), M_I)$, so daß $\hat{\Gamma}_I(\cdot): \mathbb{R} \rightarrow B(W^s(\mathbb{R}; M_I), M_I)$ mit den angegebenen Hölderexponenten in $\mathbb{R}$ gleichmäßig Hölderstetig ist.

Zu jedem $u \in W^s(\mathbb{R}; M_I)$ gibt es eine Folge $(u_m)_m$ in $C_0^\infty(\mathbb{R}; M_I)$, so daß $\lim_{m \rightarrow \infty} u_m = u$ in $W^s(\mathbb{R}; M_I)$ und

$\lim_{m \rightarrow \infty} u_m(\lambda) = u(\lambda)$ in M_I (L- f.ü. in $\mathbb{R}$). Folglich gilt
 $\Gamma_I(\cdot)u = u(\lambda)$ (L- f.ü. in $\mathbb{R}$).

(4.19) Lemma

Für jedes s , $0 \leq s \leq k_n - 1$, und jedes offene Intervall I' ,
 $I' \subset\subset I$, ist $\Gamma_{I'} \in B(H^{s,2}(\Omega_{I'}), W^s(I'; M_I))$.

Beweis

Es genügt, die Behauptung für $s = k_n - 1$ zu beweisen. Falls
 $s = 0$ ist sie in Satz 4.8,4 enthalten, so daß der Inter-
 polationssatz 4.11 angewendet werden kann, woraus die
 Behauptung für $0 < s < k_n - 1$ folgt.

Sei $u \in C_0^\infty$. Mit $v(\lambda, w) := p_I(\lambda, w)u(\Psi_I(\lambda, w))$ ($(\lambda, w) \in I \times \Sigma_I$)
 ist v bzgl. λ $(k_n - 1)$ - mal stetig partiell differenzierbar.

$$\begin{aligned}
 (4.20) \quad \frac{d}{d\lambda} v(\lambda, w) &= (p_I(\lambda, w))^{-1} \frac{d}{d\lambda} p_I(\lambda, w) v(\lambda, w) \\
 &\quad + \langle p_I(\lambda, w) \text{grad } u(\Psi_I(\lambda, w)), \frac{d}{d\lambda} \Psi_I(\lambda, w) \rangle_{\mathbb{R}^n} \\
 &= (p_I(\lambda, w))^{-1} \frac{d}{d\lambda} p_I(\lambda, w) \Gamma_I(\chi_{\Omega_I}, u)(\lambda)(w) \\
 &\quad + \langle (\Gamma_I(\chi_{\Omega_I}, \frac{\partial}{\partial x_1} u)(\lambda)(w), \dots, \Gamma_I(\chi_{\Omega_I}, \frac{\partial}{\partial x_n} u)(\lambda)(w)), \\
 &\quad \quad \quad , \frac{d}{d\lambda} \Psi_I(\lambda, w) \rangle_{\mathbb{R}^n}
 \end{aligned}$$

$(\lambda, w) \in I' \times \Sigma_I$. $\overline{I'} \times \Sigma_I$ und $\overline{\Omega_{I'}}$ ist kompakt; infolge-
 dessen ist $\frac{d}{d\lambda} v(\lambda, \cdot) \in M_I$ ($\lambda \in I$) und $\frac{d}{d\lambda} v(\cdot, \cdot)$ in $\overline{I'} \times \Sigma_I$
 beschränkt und gleichmäßig stetig. Aus dem Satz von
 Lebesgue folgt damit, daß die Abbildung

$$I' \rightarrow M_I, \quad \lambda \mapsto \Gamma_I(\chi_{\Omega_{I'}}, u)(\lambda),$$

stetig differenzierbar ist mit Ableitung $\frac{d}{d\lambda} v(\lambda, \cdot)$.

Mit (4.20) und Satz 4.8,4 (I' statt I) folgt daraus mit einer von u unabhängigen Konstanten $c_I^{(1)}$

$$\|\Gamma_I(\chi_{\Omega_I}, u)\|_{W^1(I'; \mathbb{M}_I)} \leq c_I^{(1)} \|\chi_{\Omega_I}, u\|_{H^1(\Omega_I)}.$$

Entsprechend geht man bei den Ableitungen bis zur Ordnung k_n-1 vor. Das bedeutet, daß $\Gamma_I(\chi_{\Omega_I}, u) \in W^{k_n-1}(I'; \mathbb{M}_I)$ und mit einer von u unabhängigen Konstanten c_I ,

$$\|\Gamma_I(\chi_{\Omega_I}, u)\|_{W^{k_n-1}(I'; \mathbb{M}_I)} \leq c_I \|\chi_{\Omega_I}, u\|_{H^{k_n-1}(\Omega_I)}.$$

Die Behauptung folgt schließlich aus Lemma 4.16,1.

Mit den Aussagen von Lemma 4.13 - Lemma 4.19 können wir jetzt Satz 4.8,5 beweisen :

Sei $u \in H^{\delta/2, 2}$, $\lambda \in I$ und λ sei in einem offenen Intervall I' , $I' \subset\subset I$, enthalten. Dann sei

$$v_I := \mathcal{E}_I \Gamma_I(\chi_{\Omega_I}, u), \quad v_{I''} := \mathcal{E}_{I''} \Gamma_{I''}(\chi_{\Omega_{I''}}, u)$$

dabei wird $H^{\delta/2, 2}$ stetig in $H^{k_n-1, 2}$ eingebettet, wenn $\delta/2 \geq k_n-1$. Die Definition von $\Gamma_I(\lambda)u$ ist von I' unabhängig. Sei $\lambda \in I' \cap I''$. Mit $v_I := \mathcal{E}_I \Gamma_I(\chi_{\Omega_I}, u)$ und $v_{I''} := \mathcal{E}_{I''} \Gamma_{I''}(\chi_{\Omega_{I''}}, u)$ ist (vgl. Lemma 4.15,3, Lemma 4.18)

$$\begin{aligned} (4.21) \quad \hat{\Gamma}_I(u) v_I &= v_I(\mu) = \Gamma_I(\chi_{\Omega_I}, u)(\mu) = \\ &= \chi_{I'}(\mu) \Gamma_I(\chi_{\Omega_I}, u)(\mu) \quad (L\text{-f.ü. in } I'), \end{aligned}$$

also $\hat{\Gamma}_I(\mu)(v_I - v_{I''}) = 0$ (L-f.ü. in $I' \cap I''$). Da $\hat{\Gamma}_I(\cdot)$ stetig ist, folgt daraus $\hat{\Gamma}_I(\mu)(v_I - v_{I''}) = 0$ ($\mu \in I' \cap I''$).

Die in Satz 4.8,5 verlangten Eigenschaften sind aus Lemma 4.13 - Lemma 4.19 und (4.21) zu ersehen; die Beschränkung durch $\lambda/2 \leq k_n - 1$ ist ohne Bedeutung, da andernfalls $\lambda/2 \geq k_n - 1 > 3/2$.

Eine erste Folgerung aus Satz 4.8 ist die angekündigte Verifikation der Bedingung (K2,I).

(4.22) Lemma

$F_I : E_1(I)L^2 \rightarrow L^2(I; \mathbb{M}_I)$, $F_I(E_1(I)u) := \Gamma_I(\chi_{\Omega_I} f u)$,
ist ein unitärer Operator. Für jede Borel-Menge $B \subset I$ und jedes $v \in E_1(I)L^2$ gilt

$$(4.23) \quad (F_I E_1(B)v)(\lambda) = \chi_B(\lambda)(F_I v)(\lambda) \quad (L\text{-f.ü. in } I).$$

Beweis

Man sieht unmittelbar, daß F_I unitär ist. Ebenso einfach ist (4.23), wenn man beachtet, daß $f E_1(B)u = \chi_{\Omega_B} f u$ und $\Psi_I(B \times \Sigma_I) = \Omega_B$.

Eine weitere Folgerung ist eine Aussage über das Verhalten der Resolvente $R_1(z)$ von H_1 ($z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$), wenn $\text{Im } z \rightarrow 0$, die zum Beweis von Theorem 1.20 benötigt wird.

Für jede temperierte Distribution $u \in S' := S'(\mathbb{R}^n)$ ist mit $P_\epsilon(x) := (1 + |x|^2)^{\epsilon/2}$ ($x \in \mathbb{R}^n$, $\epsilon \in \mathbb{R}$) auch $P_\epsilon u \in S'$ (vgl. [22], S.275), so daß der Raum

$$H_\epsilon^{S,2} := \{u \in S'; P_\epsilon f^* P_\epsilon f u \in L^2\} \quad (s, \epsilon \in \mathbb{R})$$

wohldefiniert ist. Wenn $\epsilon = 0$, erhält man die bekannten Sobolev-Räume (vgl. [13], S.35). Ferner ist für $\epsilon \in \mathbb{R}$ $L_\epsilon^2 := \{u \in L_{loc}^2; P_\epsilon u \in L^2\}$ mit dem Skalarprodukt $\langle u, v \rangle_\epsilon := \langle P_\epsilon u, P_\epsilon v \rangle$ ein Hilbertraum ($L_0^2 := L^2$).

(4.24) Lemma

- 1) Sei $s, \epsilon \in \mathbb{R}$. Dann ist $H_\epsilon^{s,2}$ mit dem Skalarprodukt $\langle u, v \rangle_{s, \epsilon, 2} := \langle P_\epsilon f^* P_s f u, P_\epsilon f^* P_s f v \rangle$ ein Hilbertraum, in dem S dicht ist.
- 2) Sei $s \geq 0, \epsilon \in \mathbb{R}$. Dann ist $H_\epsilon^{s,2} \subset L_\epsilon^2$ und die Einbettung ist stetig.
- 3) Sei $s = 2m$ ($m \in \mathbb{N}$), $\epsilon \in \mathbb{R}$. Dann ist

$$(4.25) \quad H_\epsilon^{2m,2} = \{u \in H_{loc}^{2m,2}; D^\alpha u \in L^2 \text{ } (\alpha \in \mathbb{N}_0^n, |\alpha| \leq 2m)\}.$$

Die Normen $\|u\|_{s, \epsilon, 2}$ bzw. $\|u\|_{s, \epsilon, 2} := \left[\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|^2 \right]^{1/2}$ sind äquivalent.

Beweis

Im Folgenden wird in der üblichen Weise L_ϵ^2 als Teilmenge von S' aufgefaßt.

zu 1): $\|\cdot\|_{s, \epsilon, 2}$ ist eine Norm: Falls $\|u\|_{s, \epsilon, 2} = 0$, gilt für jedes $\varphi \in S$ $0 = \langle P_\epsilon f^* P_s f u, \varphi^* \rangle = u(P_\epsilon f^* P_s \varphi)$. Die Abbildung $S \rightarrow S, \varphi \mapsto f P_s f^* P_\epsilon \varphi$, ist surjektiv, folglich ist $u = 0$. Die übrigen Eigenschaften der Norm sind evident.

S ist dicht in $H_\epsilon^{s,2}$: Wenn $u \in H_\epsilon^{s,2}$, ist $v := P_\epsilon f^* P_s f u \in L^2$ und es gibt eine Folge $(v_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in S mit $\lim_{k \rightarrow \infty} \|v - v_k\| = 0$. Damit ist $u_k := f^* P_{-s} f P_{-\epsilon} v_k \in S$ und $\lim_{k \rightarrow \infty} \|u - u_k\|_{s, \epsilon, 2} =$

$\lim_{k \rightarrow \infty} \|v - v_k\| = 0$. Analog folgt die Vollständigkeit von $H_{\mathcal{C}}^{S,2}$.

zu 2): Für $\varphi \in S$ erhält man, da $P_{\mathcal{C}}(-x) = P_{\mathcal{C}}(x)$ und $P_{-S} \in C_B^{\infty}$, mit ([18], Kap. 2, Theorem 4.6) eine von φ unabhängige Konstante c_S , so daß

$$(4.26) \quad \|\varphi\|_{\mathcal{C}} = \|P_{\mathcal{C}} \tilde{\varphi}\| = \|\varphi\|_{\mathcal{C},2} = \|P_{-S} P_S \tilde{\varphi}\|_{\mathcal{C},2}$$

$$\leq c_S \|P_S \tilde{\varphi}\|_{\mathcal{C},2} = c_S \|P_{\mathcal{C}}^* P_S \tilde{\varphi}\| = c_S \|\varphi\|_{S,\mathcal{C},2}.$$

Zu $u \in H_{\mathcal{C}}^{S,2}$ gibt es daher, wenn $v \in L^2$ und die Folgen (u_k) und (v_k) in S wie in 1) definiert werden, ein $\tilde{u} \in L_{\mathcal{C}}^2$ mit $\tilde{u} = \lim_{k \rightarrow \infty} u_k$ in $L_{\mathcal{C}}^2$. Für $\varphi \in S$ ist dann $|u(\varphi) - \tilde{u}(\varphi)| = |u(\varphi) - u_k(\varphi) + u_k(\varphi) - \tilde{u}(\varphi)| \leq |(v - v_k)(P_{-\mathcal{C}} P_S \tilde{\varphi}^*)| + |(u - u_k)(\varphi)| \leq \|v - v_k\|_{P_{-\mathcal{C}} P_S \tilde{\varphi}^*} + \|u - u_k\|_{\varphi} \quad (k \in \mathbb{N})$, woraus $u = \tilde{u} \in L_{\mathcal{C}}^2$ folgt. Die Stetigkeit der Einbettung $H_{\mathcal{C}}^{S,2} \rightarrow L_{\mathcal{C}}^2$ ist in (4.26) enthalten.

zu 3): Die auf der rechten Seite von (4.25) liegende Menge ist mit dem der Norm $\|\cdot\|_{2m,\mathcal{C},2}^2$ entsprechenden Skalarprodukt ein Hilbertraum, in dem S dicht ist. Beachtet man, daß die Abbildungen $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^{\alpha} P_{-2m}(x)$, ($\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, $|\alpha| \leq 2m$) in C_B^{∞} liegen, folgt mit einer zu (4.26) analogen Abschätzung die Äquivalenz der Normen $\|\cdot\|_{2m,\mathcal{C},2}$ und $\|\cdot\|_{2m,\mathcal{C},2}^2$ auf S . Da S jeweils dicht ist, beweist dies die Behauptung.

(4.27) Lemma

Sei $I^{\pm} := \{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Re} z \in I, \operatorname{Im} z \gtrless 0\}$, $\sigma > 1/2$. Die Abbildung

$$R_1(\cdot) : I^+ \rightarrow B(L_{\mathcal{C}}^2, H_{-b}^{r,2}), \quad z \mapsto R_1(z),$$

hat eine eindeutig bestimmte Fortsetzung

$$R_1^+(\cdot) : I^+ \cup I^- \rightarrow B(L_\sigma^2, H_{-\sigma}^{r,2})$$

mit $R_1^+(z) = R_1(z)$ ($z \in I^+$). $R_1^+(\cdot)$ ist in $I^+ \cup I^-$ lokal hölderstetig. In jedem Kompaktum $K \subset I^+ \cup I^-$ ist θ , mit $0 < \theta < \min\{\sigma - 1/2, 1\}$ ein zulässiger Hölderexponent.

entsprechendes gilt für I^- . Die Fortsetzung heißt dann $R_1^-(\cdot)$.

(4.28) Bemerkung

$R_1(\cdot) : \rho(H_1) \rightarrow B(L_\sigma^2, H_{-\sigma}^{r,2})$ ist lokal Lipschitzstetig. Da $(-\omega, \lambda_{\min})^\pm \cup (-\omega, \lambda_{\min}) \subset \rho(H_1)$, gilt Lemma 4.27 auch mit dem Intervall $(-\omega, \lambda_{\min})$; dann ist $R_1^\pm(\cdot) = R_1(\cdot)$.

Beweis von Lemma 4.27

Wir zeigen, daß für $R_1(z)$ eine Integraldarstellung wie in ([10], prop.4.1) gilt. Sei dazu

$$D(A_0) := H^{r,\sigma}, \quad A_0 u := P_{-\sigma} \circ P_r \circ u \quad (u \in H^{r,\sigma})$$

$$D(A) := L^2, \quad Au := P_{-\sigma} \circ u \quad (u \in L^2).$$

Offensichtlich ist $B = B^* \in B(L^2)$. Für A_0 gilt :

A_0 ist injektiv und abschließbar, die Abschließung A von A_0 ist injektiv und $S \subset D(A^*)$ mit $A^*u = P_r^* \circ P_{-\sigma} u$ ($u \in S$).

Sei $(0, v) \in \text{graph } A_0$ und $(u_k, A_0 u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine in $L^2 \times L^2$ gegen $(0, v)$ konvergente Folge in $\text{graph } A_0$. Für jedes $\varphi \in S$ ist dann $\langle v, \varphi \rangle = \lim_{k \rightarrow \infty} \langle P_{-\sigma} \circ P_r \circ u_k, \varphi \rangle = \lim_{k \rightarrow \infty} \langle u_k, P_r^* \circ P_{-\sigma} \varphi \rangle = 0$, also $v = 0$ und A_0 ist abschließbar. Wie man sieht, ist A_0 injektiv. Die Injektivität von A und die Aussage bzgl. A^*

folgt in ähnlicher Weise wie die Abschließbarkeit von A_0 .

Sei $u \in L^2$; dann ist $fP_{-\epsilon}u \in H^{\epsilon,2}$ und $\|fP_{-\epsilon}u\|_{\epsilon,2} = \|u\|$.

Für jedes offene Intervall $I' \subset\subset I$ gibt es eine Konstante $c_{I',r}$, so daß $|P_r(\Psi_I(\lambda, w)) - P_r(\Psi_I(\lambda', w))| \leq c_{I',r} |\lambda - \lambda'|$ und $|P_r(\Psi_I(\lambda, w))| \leq c_{I',r}$ ($\lambda, \lambda' \in I'$, $w \in \Sigma_I$). Damit sind durch

$$\begin{aligned} T_I(\lambda, A)u &:= P_{r \setminus \Psi_I(\lambda, \cdot)} \tilde{\Gamma}_I(\lambda) fP_{-\epsilon}u \\ T_I(\lambda, B)u &:= \tilde{\Gamma}_I(\lambda) fP_{-\epsilon}u \end{aligned} \quad (u \in L^2, \lambda \in I)$$

lineare Operatoren $T_I(\lambda, A), T_I(\lambda, B) \in B(L^2, M_I)$ definiert.

$T_I(\cdot, A)$ und $T_I(\cdot, B)$ sind bezüglich der Norm in $B(L^2, M_I)$

lokal hölderstetig mit einem Hölderexponenten wie in

Satz 4.8,5. Mit Bemerkung 4.10 ($g:=1$ bzw. $g:=P_r$, $f:=fP_{-\epsilon}\varphi$) folgt daraus für $\varphi \in S$

$$\begin{aligned} (F_I E_1(I) A^* \varphi)(\lambda) &= (\Gamma_I \chi_{\Omega_I} f A^* \varphi)(\lambda) = (\Gamma_I \chi_{\Omega_I} P_r f P_{-\epsilon} \varphi)(\lambda) = \\ &= P_r(\Psi_I(\lambda, \cdot)) (\Gamma_I f P_{-\epsilon} \varphi)(\lambda) = T_I(\lambda, A) \varphi \quad (L\text{-f.ü. in } I). \end{aligned}$$

Entsprechendes gilt für $T_I(\lambda, B)$. Mit H_1 , $K := L^2$, A, B , und $D := D' := S$ ist $(K1)a$, $(K2, I)$ und $(K3, I)$ erfüllt; für jedes offene Intervall $I' \subset\subset I$ und $z \in I^\pm$ gilt wegen

(4.10), (4.11)

$$\begin{aligned} (4.29) \quad \langle AR_1(z) E_1(I') Bu, v \rangle &= \\ &= \int_{I'} (\lambda - z)^{-1} \langle T_I(\lambda, A)^* T_I(\lambda, B) u, v \rangle d\lambda \quad (u, v \in S). \end{aligned}$$

Man sieht sofort, daß (4.29) auch für $u, v \in L^2$ gilt, da

$R_1(z) \in B(L^2, H^{r,2})$ und $A|_{H^{r,2}} = A_0 \in B(H^{r,2}, L^2)$. Sei

$$\varphi_I(\lambda, u, v) := \langle T_I(\lambda, A)^* T_I(\lambda, B) u, v \rangle \quad (u, v \in L^2, \lambda \in I).$$

Aus den Eigenschaften von $T_I(\lambda, A)$ und $T_I(\lambda, B)$ folgt dann

$$|\varphi_I(\lambda, u, v)| \leq c_{I', \theta} \|u\| \|v\| \quad (u, v \in L^2; \lambda, \lambda' \in I') \quad (4.30)$$

$$|\varphi_I(\lambda, u, v) - \varphi_I(\lambda', u, v)| \leq c_{I', \theta} |\lambda - \lambda'|^\theta \|u\| \|v\|.$$

Dabei hängt die Konstante $c_{I', \theta}$ nicht von u und v ab, θ ist der Hölderexponent von $T_I(\cdot, A)$ bzw. $T_I(\cdot, B)$, wobei $0 < \theta < \min\{\epsilon - 1/2, 1\}$.

Wählt man das offene Intervall I'' so, daß $I' \subset \subset I'' \subset \subset I$, erhält man für $w_{I''}(z, u, v) := \langle AR_1(z)E_1(I'')Bu, v \rangle$ aus (4.29), (4.30) und ([15], Kap. I, §20, 21) ein $\epsilon_{I'', \theta} \in \mathbb{R}_+$ und eine Konstante $c_{I'', \theta}^1$, so daß

$$(4.31) \quad |w_{I''}(z, u, v)| \leq c_{I'', \theta}^1 \|u\| \|v\|$$

$$(4.32) \quad |w_{I''}(z, u, v) - w_{I''}(z', u, v)| \leq c_{I'', \theta}^1 |z - z'|^{\theta'} \|u\| \|v\|,$$

wenn $u, v \in L^2$; $z, z' \in I'^+$, $|\operatorname{Im} z|, |\operatorname{Im} z'| \leq \epsilon_{I'', \theta}$; $\theta' \in (0, \theta)$.

Aus (4.31) folgt für $u \in L_{\epsilon}^2$, da $P_{\epsilon} u \in L^2$,

$$\begin{aligned} \|R_1(z)E_1(I'')u\|_{r, -\epsilon, 2} &= \|AR_1(z)E_1(I'')BP_{\epsilon}u\| \\ &\leq c_{I'', \theta}^1 \|P_{\epsilon}u\| = c_{I'', \theta}^1 \|u\|_{\epsilon}. \end{aligned}$$

Entsprechend folgt aus (4.32)

$$\|(R_1(z)E_1(I'') - R_1(z')E_1(I''))u\|_{r, -\epsilon, 2} \leq c_{I'', \theta}^1 |z - z'|^{\theta'} \|u\|_{\epsilon}.$$

Dabei genügen z, z' und θ' den Bedingungen zu (4.31), (4.32).

Der Operator $R_{1,I''}(z) := R_1(z)E_1(I'') \in B(L_{\sigma}^2, H_{-\sigma}^{r,2})$ ($z \in I^+$)
 hat infolgedessen eine Fortsetzung $R_{1,I''}^+(z) \in B(L_{\sigma}^2, H_{-\sigma}^{r,2})$
 ($z \in I^+ \cup I'$) und $R_{1,I''}^+(\cdot)$ ist in $I^+ \cup I'$ lokal hölderstetig
 bezüglich der Norm in $B(L_{\sigma}^2, H_{-\sigma}^{r,2})$. In jedem Kompaktum in
 $I^+ \cup I'$ ist θ , $0 < \theta < \min\{\sigma - 1/2, 1\}$ ein zulässiger Hölder-
 exponent, da mit θ auch θ' das Intervall $(0, \min\{\sigma - 1/2, 1\})$
 durchläuft.

Sei $I_0 := \mathbb{R} \setminus I''$, $z, z' \in I^+$. Weil $|(z-\lambda)^{-1} \chi_{I_0}(\lambda)| \leq c_{I', I''}$
 ($\lambda \in \mathbb{R}$), gilt $\|R_1(z)E_1(I_0)u\| \leq c_{I', I''}\|u\| \leq c_{I', I''}\|u\|_{\sigma}$ ($u \in L_{\sigma}^2$).
 Mit einer geeigneten Konstanten c folgt aus (1.7), daß
 $\|P_{\mathbb{R}} v\| \leq c(\|H_1 v\| + \|v\|)$ ($v \in H^{r,2}$). Daraus folgt, wenn $u \in L_{\sigma}^2$,

$$\begin{aligned} \|R_1(z)E_1(I_0)u\|_{r, -\sigma, 2} &= \|P_{-\sigma} \{ P_{\mathbb{R}}^* R_1(z)E_1(I_0)u \} \| \\ &\leq c(\|H_1(R_1(z)E_1(I_0)u)\| + \|R_1(z)E_1(I_0)u\|) \\ &\leq 2c(1+|z|)\|R_1(z)E_1(I_0)u\| \leq 2c(1+|z|)c_{I', I''}\|u\|_{\sigma}; \end{aligned}$$

entsprechend ist, da $R_1(z) - R_1(z') = (z - z')R_1(z)R_1(z')$,

$$\begin{aligned} \|(R_1(z)E_1(I_0) - R_1(z')E_1(I_0))u\|_{r, -\sigma, 2} \\ \leq 2c(1+|z|)c_{I', I''}^2|z - z'| \|u\|_{\sigma}. \end{aligned}$$

Infolgedessen hat auch der Operator $R_{1,I_0}(z) := R_1(z)E_1(I_0)$
 eine Fortsetzung $R_{1,I_0}^+(z) \in B(L_{\sigma}^2, H_{-\sigma}^{r,2})$ ($z \in I^+ \cup I'$). $R_{1,I_0}^+(\cdot)$
 hat die gleichen Eigenschaften wie $R_{1,I'}^+(\cdot)$. Mit

$$R_1^+(z) := \begin{cases} R_1(z) & , \text{ wenn } z \in I^+ \\ R_{1,I''}^+(z) + R_{1,\mathbb{R} \setminus I''}^+(z) & , \text{ wenn } z \in I' \subset \subset I'' \subset \subset I, \end{cases}$$

hängt $R_1^+(z)$ nicht von I' und I'' ab, da stets
 $R_1(z) = R_1(z)E_1(I'') + R_1(z)E_1(\mathbb{R} \setminus I'')$ ($z \in I^+$) und die jeweiligen Anteile der Zerlegung von $R_1^+(z)$, stetige Abbildungen
 $I^+ \cup I' \rightarrow B(L_6^2, H_{-6}^{r,2})$ sind. Man sieht unmittelbar, daß $R_1^+(\cdot)$
 die verlangten Eigenschaften hat.

Ersetzt man im Beweis I^+ durch I^- , erhält man das entsprechende Ergebnis.

§ 5 Der Beweis von Theorem 1.16

Dieser Abschnitt enthält die noch ausstehenden Beweisschritte für Theorem 1.16 (vgl. Bem.3.8) :

- 1) Definition von K , A , B , C wie in (K1) erforderlich;
Nachweis von (K4) und (K5,I).
- 2) Existenz des selbstadjungierten Operators H_2 ;
Nachweis der Voraussetzungen zu Satz 3.1, woraus
(K1) folgt, und von $\varsigma_w(H_1) = \varsigma_w(H_2)$.
- 3) Nachweis von (K3,I).

Aus beweistechnischen Gründen wird $h_2(u,v)$ in (S 1) zu

$$h_2(u,v) = h_1(u,v) + \sum_{\mu, \nu=1}^{N+1} \langle q_{\mu\nu} f^* T_\nu f u, f^* T_\mu f v \rangle$$

erweitert, wobei $q_{\mu\nu} := 0$, wenn $\max\{\mu, \nu\} = N+1$, $T_{N+1} := P_{r/2}$.

Die Voraussetzungen [S 1] sind auch für $q_{\mu\nu}$, T_μ ($1 \leq \mu, \nu \leq N+1$) erfüllt; $t_{N+1} = 1$, $s_{N+1} = r/2$.

Diese Erweiterung erleichtert den Beweis für die Abgeschlossenheit von A , B , die Injektivität von A und ermöglicht die später bei (K10) notwendigen Eigenschaften von A .

(5.1) Bemerkung

Um die Bezeichnungen zu vereinfachen, wird ohne Einschränkung angenommen, daß in [S 1] jeweils $t_\mu = 1$ ($1 \leq \mu \leq N$).

Ansonsten wird T_μ durch $t_\mu^{-1} T_\mu$, $h_{\mu\nu}$ durch $t_\nu h_{\mu\nu}$ und $g_{\mu\nu}$ durch $t_\mu g_{\mu\nu}$ ersetzt ($1 \leq \mu, \nu \leq N$). Entsprechend wird in

Bemerkung 1.10 T_μ durch $t_\mu^{-1}T_\mu$ und $q_{\mu\nu}$ durch $t_\mu t_\nu q_{\mu\nu}$ ersetzt ($1 \leq \mu, \nu \leq N$).

An der Gestalt von h_2 ändert sich dadurch nichts, das Gleiche gilt für die Ungleichungen (1.9) und (1.11). Die weiteren Bedingungen in [S 1]II und III werden auch von den neuen Funktionen erfüllt.

Für den folgenden Hilfssatz wird an die Definition der Funktionenklassen M_α, N_α ($\alpha > 0$) erinnert (S.11), insbesondere, daß $M_\alpha = N_\alpha$ ($\alpha \neq n$) und $M_\alpha \cap M_n = \emptyset$ ([18], Kap.5, Lemma 2.4).

(5.2) Lemma

1) Wenn $q \in N_{2s}$ ($s > 0$), ist $qu \in L^2$ ($u \in H^{s,2}$) und die Abbildung

$$Q(q) : H^{s,2} \rightarrow L^2, u \mapsto qu, \quad (1)$$

ist linear und stetig.

2) Wenn $q \in N_{2s}$ ($s > 0$) und $\lim_{|y| \rightarrow \infty} M_n(q)(y) = 0$, ist $Q(q) : H^{s',2} \rightarrow L^2$ ($s' > s$) kompakt.

3) Wenn $q \in N_{2s}$ ($s > 0$) und $\lim_{\sigma \rightarrow 0+} N_{2s,\sigma}(q) = 0$, falls $2s \leq n$, gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Konstante $c_\varepsilon(q)$, so daß

$$\|qu\| \leq \varepsilon \|u\|_{s,2} + c_\varepsilon(q) \|u\| \quad (u \in H^{s,2}).$$

4) Wenn $0 < t < s$, gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Konstante c_ε , so daß $\|u\|_{t,2} \leq \varepsilon \|u\|_{s,2} + c_\varepsilon \|u\|$ ($u \in C_0^\omega$).

Beweis

zu 1), 3), 4): Die Aussagen folgen aus ([18], Kap.7,

¹⁾ Der Operator "Multiplikation mit der Funktion q", wird in Zukunft mit $Q(q)$ bezeichnet.

Theorem 7.13, Lemma 7.5, Lemma 7.4).

zu 2): Wie man sieht, ist $N_{2s} \subset M_\alpha$ mit $2s < \alpha < 2s'$. Dann folgt aus ([18], Kap. 6, Theorem 4.1) die Behauptung.

Sei

$$K := \bigoplus_{\mu, \nu=1}^{N+1} K_{\mu\nu}, \quad K_{\mu\nu} := L^2 \quad (1 \leq \mu, \nu \leq N+1),$$

die äußere Hilbertsumme der Hilberträume $K_{\mu\nu}$. Die Elemente von K bezeichnen wir kurz mit $\{u_{\mu\nu}\}$. Norm und Skalarprodukt in K sind definiert durch

$$\|u\|_K := \left(\sum_{\mu, \nu=1}^{N+1} \|u_{\mu\nu}\|^2 \right)^{1/2}, \quad \langle u, v \rangle_K := \sum_{\mu, \nu=1}^{N+1} \langle u_{\mu\nu}, v_{\mu\nu} \rangle.$$

Dann sei

$$(5.3) \quad \begin{aligned} D(A_0) &:= H^{r/2, 2}, \quad A_0 : D(A_0) \rightarrow K \\ (A_0 u)_{\mu\nu} &:= a_{\mu\nu} f^* T_\mu f u \quad (1 \leq \mu, \nu \leq N+1) \end{aligned}$$

$$(5.4) \quad \begin{aligned} D(B_0) &:= H^{r/2, 2}, \quad B_0 : D(B_0) \rightarrow K \\ (B_0 u)_{\mu\nu} &:= b_{\mu\nu} f^* T_\nu f u \quad (1 \leq \mu, \nu \leq N+1) \end{aligned}$$

$$(5.5) \quad \begin{aligned} D(C) &:= K, \quad C : K \rightarrow K \\ (Cu)_{\mu\nu} &:= d_{\mu\nu} u_{\mu\nu} \quad (1 \leq \mu, \nu \leq N+1) \end{aligned}$$

wobei

$$(5.6) \quad \begin{aligned} a_{\mu\nu} &:= P_{-\delta/2}, \quad \text{falls } 1 \leq \mu \leq N+1, \nu = N+1 \\ a_{\mu\nu} &:= 0, \quad \text{falls } 1 \leq \nu \leq N, \mu = N+1 \end{aligned}$$

$$a_{\mu\nu} := g_{\mu\nu}^*, \quad \text{falls } \max\{\mu, \nu\} \leq N$$

$$b_{\mu\nu} := 0, \quad \text{falls } 1 \leq \mu \leq N+1, \nu = N+1$$

$$(5.7) \quad b_{\mu\nu} := P_{-\delta/2}, \quad \text{falls } 1 \leq \nu \leq N, \mu = N+1$$

$$b_{\mu\nu} := h_{\mu\nu}, \quad \text{falls } \max\{\mu, \nu\} \leq N$$

$$(5.8) \quad \begin{aligned} d_{\mu\nu} &:= 0 & , \text{ falls } \max\{\mu, \nu\} = N+1 \\ d_{\mu\nu} &:= 1 & , \text{ falls } \max\{\mu, \nu\} \leq N \end{aligned}$$

(5.9) Lemma

1) A_0, B_0, C sind wohldefiniert.

$A_0, B_0 \in B(H^{r/2, 2}, K), A_0, B_0 \in B_\infty(H^{r/2}, K), C \in B(K).$

2) A_0 und B_0 sind abschließbar mit Abschließung A bzw. B .
 A ist injektiv, woraus (K5, I) folgt.

3) $D(H_1) \subset D(A) \cap D(B)$; A und B ist H_1 -kompakt, folglich ist (K4) erfüllt.

Beweis

zu 3): Die Aussagen folgen aus 1) und 2), da $D(H_1) \subset H^{r/2, 2}$ und $R_1(z) \in B(L^2, H^{r/2, 2})$ ($z \in \mathbb{C}, \operatorname{Im} z \neq 0$).

zu 1): Wie man sieht, ist C wohldefiniert und $C \in B(K).$

Sei $\delta \gg s \gg 0$, $T_0: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ meßbar und $P_{-s}T_0 \in L^\infty$. Man sieht ohne Mühe, daß $\delta^*T_0 f \in H^{\delta-s, 2}$ ($u \in H^{\delta, 2}$) und die Abbildung $\delta^*T_0 f: H^{\delta, 2} \rightarrow H^{\delta-s, 2}$, $u \mapsto \delta^*T_0 f u$, stetig ist.

Sei $q \in L^\infty$, falls $\gamma = s$. Dann ist $Q(q) \in B(L^2)$ und $Q(q) \cdot \delta^*T_0 f \in B(H^{\delta, 2}, L^2)$; gilt darüberhinaus $\lim_{|y| \rightarrow \infty} M_n(q)(y) = 0$, ist $Q(q) \cdot \delta^*T_0 f \in B_\infty(H^{2s, 2}, L^2)$, wenn $s > 0$ (vgl. Lemma 5.2, 2).

Sei $q \in N_2(\gamma-s)$, falls $s < \gamma$. Aus Lemma 5.2, 1) folgt, daß $Q(q) \in B(H^{\delta-s, 2}, L^2)$; infolgedessen ist $Q(q) \cdot \delta^*T_0 f \in B(H^{\delta, 2}, L^2)$. Gilt zusätzlich $\lim_{|y| \rightarrow \infty} M_n(q)(y) = 0$, ist $Q(q) \in B_\infty(H^{2\gamma-s, 2}, L^2)$, da $2\gamma-s > \gamma-s$. Folglich ist $Q(q) \cdot \delta^*T_0 f \in B_\infty(H^{2\gamma, 2}, L^2)$.

Wenn mit $\sigma > 0$ $P_\sigma q \in M_n$, gilt $M_n(q)(y) \leq 3^\sigma (P_{-2\sigma} M_n(P_\sigma q))(y)$ ($y \in \mathbb{R}^n$), also $\lim_{|y| \rightarrow \infty} M_n(q)(y) = 0$.

Übertragen auf

$$\begin{aligned} \tau_0 &:= T_\mu, \quad q := a_{\mu\nu}, \quad \xi := r/2, \quad s := s_\mu, \quad \zeta := \delta/2 \\ T_0 &:= T_\nu, \quad q := b_{\mu\nu}, \quad \xi := r/2, \quad s := s_\nu, \quad \zeta := \delta/2 \end{aligned} \quad (1 \leq \mu, \nu \leq N+1)$$

folgt aus [S 1], der Definition der Funktionen $a_{\mu\nu}$, $b_{\mu\nu}$ in (5.6) bzw. (5.7) und der vorangegangenen Bemerkung, daß

$$(5.10) \quad Q(b_{\mu\nu}) \xi^* T_\nu \xi \in B(H^{r/2, 2}, L^2) \cap B_\infty(H^{r, 2}, L^2) \quad (1 \leq \mu, \nu \leq N+1).$$

Vergleicht man (5.10) mit (5.3) und (5.4), ergibt (5.10) die Behauptung in Lemma 5.9, 1.

A_0 ist abschließbar : Sei $(u_k, A_0 u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\text{graph } A_0$ mit Grenzwert $(0, v) \in \overline{\text{graph } A_0}^{L^2 \times \mathbb{K}}$. Um zu zeigen, daß $v = 0$, geht man komponentenweise vor.

$\mu = \nu = N+1$: Da $(A_0 u_k)_{\mu\nu} = P_{-\delta/2} \xi^* P_{r/2} \xi u_k$, folgt wie im Beweis zu Lemma 4.27, daß $v_{\mu\nu} = 0$.

$\mu = N+1, \nu \leq N$: Hier ist nichts zu beweisen, da $a_{\mu\nu} = 0$.

$\mu = \nu \leq N$: Mit $\varphi \in S$ ist $\langle v_{\mu\nu}, \varphi \rangle = \lim_{k \rightarrow \infty} \langle P_{-\delta/2} \xi^* T_\mu \xi u_k, \varphi \rangle = \lim_{k \rightarrow \infty} \langle u_k, \xi^* T_\mu \xi P_{-\delta/2} \varphi \rangle = 0$, da $\xi^* T_\mu \xi P_{-\delta/2} \varphi \in L^2$, also $v_{\mu\nu} = 0$. O.E. gilt deshalb (sonst wähle man eine geeignete Teilfolge von $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$), da $P_{-\delta/2}(x) \neq 0$ ($x \in \mathbb{R}^n$),

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (\xi^* T_\mu \xi u_k)(x) = 0 \quad (L\text{-f.ü. in } \mathbb{R}^n).$$

$\mu, \nu \leq N$: O.E. gilt auch hier $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{\mu\nu}(x) (\xi^* T_\mu \xi u_k)(x) = v_{\mu\nu}(x)$ (L -f.ü. in $\mathbb{R}^n$), folglich ist (vgl. $\mu \leq N, \nu = N+1$) $v_{\mu\nu} = 0$.

A_0 ist injektiv, denn falls $A_0 u = 0$, ist $(A_0 u)_{N+1, N+1} = 0$,

woraus $u = 0$ folgt. Da A ebenfalls kompakter Kern ist, ist, folgt wie im Beweis zu Lemma 4.27 mit $\mu = \nu = N+1$, daß A injektiv ist.

B_0 hat in $H^{r/2,2}$ denselben Kern wie A , deshalb folgt die Abschließbarkeit von B_0 wie bei A_0 .

Aufgrund von Satz 4.2 (1.16.1,c) und Lemma 5.9 ist durch

$$(5.11) \quad \begin{aligned} h_2(u,v) &:= h_1(u,v) + \langle CBu, Av \rangle_K \\ &= \sum_{\mu, \nu=1}^N \langle h_{\mu\nu} f^* T_\nu f u, g_{\mu\nu}^* f^* T_\mu f v \rangle \end{aligned} \quad (u, v \in H^{r/2,2})$$

und $h_2: H^{r/2,2} \times H^{r/2,2} \rightarrow \mathbb{C}$ bilinear reell definiert.

(5.12) Lemma

1) Es gibt positive Konstanten c, c', c'' , so daß

$$(5.13) \quad c \|u\|_{r/2,2}^2 - c' \|u\|^2 \leq h_2(u,u) \leq c'' \|u\|_{r/2,2}^2 \quad (u \in H^{r/2,2})$$

2) h_2 ist symmetrisch, abgeschlossen und nach unten beschränkt.

Beweis

zu 2): a) h_2 ist symmetrisch. Es genügt zu zeigen, daß $h_2(u,u)$ reell ist ($u \in H^{r/2,2}$) (vgl. [9], S.309).

Sei $u \in H^{r/2,2}$ und $v_\mu := f^* T_\mu f u \in H^{r/2 - s_\mu, 2}$ ($1 \leq \mu \leq N+1$).

C_0^∞ ist dicht in $H^{r/2 - s_\mu, 2}$. Infolgedessen gibt es Folgen

$(v_{\mu,k})_{k \in \mathbb{N}}$ in C_0^∞ mit $\lim_{k \rightarrow \infty} v_{\mu,k} = v_\mu$ in $H^{r/2 - s_\mu, 2}$. Da jeweils $Q(g_{\mu\nu}^*) \in B(H^{r/2 - s_{\mu\nu}, 2}, L^2)$, $Q(h_{\mu\nu}) \in B(H^{r/2 - s_\nu, 2}, L^2)$

und $q_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} h_{\mu\nu} = q_{\nu\mu}^*$ ($1 \leq \mu, \nu \leq N$), folgt

$$\begin{aligned}
\langle CBu, Au \rangle_K^* &= \sum_{\mu, \nu=1}^N \langle h_{\mu\nu} f^* T_{\nu} f u, g_{\mu\nu}^* f^* T_{\mu} f u \rangle^* \\
&= \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{\mu, \nu=1}^N \langle g_{\mu\nu}^* v_{\mu, k}, h_{\mu\nu} v_{\nu, k} \rangle = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{\mu, \nu=1}^N \langle q_{\mu\nu}^* v_{\mu, k}, v_{\nu, k} \rangle \\
&= \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{\mu, \nu=1}^N \langle q_{\nu\mu} v_{\nu, k}, v_{\mu, k} \rangle = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{\mu, \nu=1}^N \langle h_{\nu\mu} v_{\mu, k}, g_{\nu\mu}^* v_{\nu, k} \rangle \\
&= \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{\mu, \nu=1}^N \langle h_{\mu\nu} v_{\nu, k}, g_{\mu\nu}^* v_{\mu, k} \rangle = \langle CBu, Au \rangle_K,
\end{aligned}$$

also $h_2(u, u)^* = h_2(u, u)$, denn $h_1(u, u)$ ist reell.

b) Aus 1) folgt, daß h_2 abgeschlossen und nach unten beschränkt ist.

Die zweite Behauptung ist evident. Sei dann $u \in L^2$ und

$(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $D(h_2)$ mit $\lim_{k \rightarrow \infty} u_k = u$ und

$\limsup_{k \rightarrow \infty} |h_2(u_k - u_m)| = 0$. Aufgrund von (5.13) ist $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$

eine Cauchy-Folge in $H^{r/2, 2}$ und konvergiert deshalb gegen

ein $v \in H^{r/2, 2}$. Da auch $v = \lim_{k \rightarrow \infty} u_k$ in L^2 , ist $u = v \in H^{r/2, 2}$.

Aus Satz 4.2 (1.16.1, c), (4.4) und Lemma 5.9 folgt deshalb

$$\lim_{k \rightarrow \infty} h_2(u_k - u) = \lim_{k \rightarrow \infty} h_1(u_k - u) + \lim_{k \rightarrow \infty} \langle CB(u_k - u), A(u_k - u) \rangle_K = 0,$$

d.h. h_2 ist abgeschlossen.

zu 1): Zunächst wird (5.13) gezeigt, falls in [S 1]

[S 1]III.b.1 zutrifft.

Zu diesem Zweck werden die Terme $|\langle h_{\mu\nu} f^* T_{\nu} f u, g_{\mu\nu}^* f^* T_{\mu} f u \rangle|$

$(1 \leq \mu, \nu \leq N, u \in H^{r/2, 2})$ abgeschätzt. Der Größe der Zahlen

s_μ, s_ν entsprechend werden vier Fälle unterschieden:

a) $s_\mu = s_\nu = r/2$: Aus (1.9) folgt, da jeweils

$$\|f_{-s_\mu} T_{\mu} f u\|_{L^2} = 1,$$

$$|\langle h_{\mu\nu} f^* T_{\nu} f u, g_{\mu\nu}^* f^* T_{\mu} f u \rangle|$$

$$= \sum_{s_\mu = s_\nu = r/2} \|g_{\mu\nu}^*\|_{L^2} \|h_{\mu\nu}\|_{L^2} \|f^* T_{\nu} f u\| \|f^* T_{\mu} f u\| \leq C_0 \|u\|_{r/2, 2}^2$$

b) $s_\mu = r/2, s_\nu < r/2$: Wegen Lemma 5.2,3 und [S 1] III.b.2 gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Konstante $c_\varepsilon(h_{\mu\nu})$, so daß

$$\begin{aligned} & |\langle h_{\mu\nu} f^* T_\nu f u, g_{\mu\nu} f^* T_\mu f u \rangle| \\ & \leq \|g_{\mu\nu}\|_\infty \|u\|_{r/2,2} (\varepsilon \|u\|_{r/2,2} + c_\varepsilon(h_{\mu\nu}) \|u\|) \\ & \leq (\varepsilon + \sigma c_\varepsilon(h_{\mu\nu})) \|g_{\mu\nu}\|_\infty \|u\|_{r/2,2}^2 + \sigma^{-1} \|g_{\mu\nu}\|_\infty c_\varepsilon(h_{\mu\nu}) \|u\|^2. \\ & (\sigma > 0), \text{ weil } \|u\|_{r/2,2} \|u\| \leq \sigma \|u\|_{r/2,2}^2 + \sigma^{-1} \|u\|^2. \end{aligned}$$

c) $s_\mu < r/2, s_\nu = r/2$: Man erhält analog für $\varepsilon, \sigma > 0$

$$\begin{aligned} & |h_{\mu\nu} f^* T_\nu f u, g_{\mu\nu} f^* T_\mu f u| \\ & \leq (\varepsilon + \sigma c_\varepsilon(g_{\mu\nu})) \|h_{\mu\nu}\|_\infty \|u\|_{r/2,2}^2 + \sigma^{-1} \|h_{\mu\nu}\|_\infty c_\varepsilon(g_{\mu\nu}) \|u\|^2. \end{aligned}$$

d) $s_\mu, s_\nu < r/2$: O.E. gilt $\lim_{\delta \rightarrow 0^+} N_{2(r/2 - s_\mu), \delta}(g_{\mu\nu}) = 0$, falls $2(r/2 - s_\mu) \leq n$. Aus Lemma 5.2,1,2 folgt für $\varepsilon, \sigma > 0$

$$\begin{aligned} & |\langle h_{\mu\nu} f^* T_\nu f u, g_{\mu\nu} f^* T_\mu f u \rangle| \\ & \leq c(h_{\mu\nu}) \|u\|_{r/2,2} (\varepsilon \|u\|_{r/2,2} + c_\varepsilon(g_{\mu\nu}) \|u\|) \\ & \leq (\varepsilon + \sigma c_\varepsilon(g_{\mu\nu})) c(h_{\mu\nu}) \|u\|_{r/2,2}^2 + \sigma^{-1} c(h_{\mu\nu}) c_\varepsilon(g_{\mu\nu}) \|u\|^2. \end{aligned}$$

a) - d) zusammenfassend erhält man zu jedem $\varepsilon > 0$ nach geeigneter Wahl von $0 < \varepsilon' < \varepsilon$ und $\sigma > 0$ eine Konstante c_ε , so daß

$$|\langle CBu, Au \rangle_{\mathbb{K}}| \leq (C_0 + \varepsilon) \|u\|_{r/2,2}^2 + c_\varepsilon \|u\|^2.$$

Wegen [S 1] I haben die Konstanten c_1, c_2, c_3 in (4.7) den Wert C_1, C_2, C_3 . Infolgedessen ist

$$h_2(u, u) \geq (C_1 - C_0 - \varepsilon) \|u\|_{r/2,2}^2 - (C_3 + c_\varepsilon) \|u\|^2$$

und, da $C_0 < C_1$, $(C_1 - C_0 - \varepsilon)$ positiv, wenn ε genügend klein ist.

Schließlich folgt aus (4.7) und Lemma 5.9,1 die Existenz einer Konstanten $c'' > 0$, so daß $h_2(u, u) \leq c'' \|u\|_{r/2, 2}^2$.

In der Situation von Bemerkung 1.10 gelte statt [S 1] III.b.1 die Bedingung [S 1] III.b.1'. Wir setzen $T_\alpha(x) := x^\alpha$ ($x \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, $|\alpha| \leq m$) und erhalten mit geeigneten Konstanten c_α $|T_\alpha(x)| \leq c_\alpha P_{|\alpha|}(x)$. Wie man sieht, ist dann

$$h_1(u, u) = \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq m} \langle c_{\alpha\beta} f^* T_\beta f u, f^* T_\alpha f u \rangle \quad (u \in H^{m, 2}).$$

Sei $q \in L^\infty$, $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\alpha|, |\beta| \leq m$ und $(\alpha, \beta) \neq (m, m)$, etwa $|\alpha| < m$. Dann gibt es wegen Lemma 5.2,4 zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Konstante $c_\varepsilon > 0$, so daß mit $c_q := \|q\|_\infty$

$$\begin{aligned} (5.14) \quad & |\langle q f^* T_\alpha f u, f^* T_\beta f u \rangle| \leq c_q c_\alpha c_\beta \|u\|_{|\alpha|, 2} \|u\|_{m, 2} \\ & \leq c_q c_\alpha c_\beta (\varepsilon \|u\|_{m, 2}^2 + c_\varepsilon \|u\| \|u\|_{m, 2}) \\ & \leq c_q c_\alpha c_\beta (\varepsilon + \varepsilon c_\varepsilon) \|u\|_{m, 2}^2 + \varepsilon^{-1} c_q c_\alpha c_\beta c_\varepsilon \|u\|^2 \end{aligned}$$

($u \in H^{m, 2}$, $\dots$).

Sei $\tilde{T}_\mu(x) := \sum_{|\alpha| \leq m} c_\mu x^\alpha$ ($x \in \mathbb{R}^n$), wenn $s_\mu = m$. Dann ist

$$\begin{aligned} h_1(u, u) &= \sum_{s_\mu = s_\nu = m} \langle q_{\mu\nu} f^* T_\nu f u, f^* T_\mu f u \rangle \\ &= \left[\sum_{\substack{|\alpha|, |\beta| \leq m \\ (\alpha, \beta) \neq (m, m)}} \langle c_{\alpha\beta} f^* T_\beta f u, f^* T_\alpha f u \rangle + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{s_\alpha = s_\beta = m} \langle q_{\mu\nu} f^* (\sum_{|\alpha| \leq m} c_\nu T_\alpha) f u, f^* (\sum_{|\beta| \leq m} c_\mu T_\beta) f u \rangle \right] \\ &+ \left[\sum_{\substack{|\alpha|, |\beta| \leq m \\ (\alpha, \beta) \neq (m, m)}} \langle c_{\alpha\beta} f^* T_\beta f u, f^* T_\alpha f u \rangle + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{s_\mu = s_\nu = \overline{m}} \langle q_{\mu\nu} f^* T_\nu f u, f^* \tilde{T}_\mu f u \rangle + \\
& + \sum_{s_\mu = s_\nu = \overline{m}} \langle q_{\mu\nu} f^* \tilde{T}_\nu f u, f^* T_\mu f u \rangle] =: w_1(u, u) + w_2(u, u) .
\end{aligned}$$

Da jeweils $c_{\alpha\beta} = c_{\beta\alpha}^*$ und $q_{\mu\nu} = q_{\nu\mu}^*$, sind beide Sesqui-Linearformen w_1 und w_2 symmetrisch, so daß $w_1(u, u)$ und $w_2(u, u)$ reell ist.

Vergleicht man (5.14) mit (1.11) auf reelles Ausdrücke mit (5.14) (dabei ist $q = c_{\alpha\beta}$ bzw. $q = q_{\mu\nu} \in L^{\overline{m}}$; $T_\nu, \tilde{T}_\mu$ bzw. $\tilde{T}_\nu, T_\mu$ lassen sich durch F_m, F_{m-1} bzw. F_{m-1}, F_m abschätzen), sieht man, daß es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Konstante $c_\varepsilon(w_2)$ gibt, so daß

$$(5.15) \quad w_2(u, u) \geq -\varepsilon \|u\|_{m,2}^2 - c_\varepsilon(w_2) \|u\|^2 \quad (u \in H^{m,2} .$$

Vergleicht man die Gestalt von $w_1(u, u)$ mit (1.11), folgt aus ([1], Theorem 7.6), wenn man beachtet, daß $f^* T_\alpha f$ der Differentialoperator D^α ist ($\alpha \in \mathbb{N}_0^n$), die Existenz zweier Konstanten $\hat{c}_1 > 0$, $\hat{c}_2 > 0$, so daß

$$(5.16) \quad w_1(u, u) \geq \hat{c}_1 \|u\|_{m,2}^2 - \hat{c}_2 \|u\|^2 \quad (u \in H^{m,2} .$$

Man sieht sofort, daß $\langle s_\mu, s_\nu \rangle \neq (r/2, r/2)$ reell ist. Zusammenfassend folgt dann aus (5.14) = (5.15) und den zuvor behandelten Fällen b) - d) zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $c_\varepsilon > 0$, so daß

$$h_2(u, u) \geq (\hat{c}_1 - \varepsilon) \|u\|_{m,2}^2 - (\hat{c}_2 + c_\varepsilon) \|u\|^2 ,$$

woraus (5.13) folgt, wenn nur ε genügend klein ist.

Für die Sesqui-Linearform h_2 erhält man damit :

(5.17) Satz

Es gibt einen selbstadjungierten Operator $-H_2-$ mit den folgenden Eigenschaften :

- 1) H_2 ist nach unten beschränkt.
- 2) $D(H_2) \subset D(h_2)$ und $h_2(u, v) = \langle H_2 u, v \rangle$ ($u \in D(H_2), v \in D(h_2)$).
- 3) $D(H_2)$ ist ein Core von h_2 .
- 4) Wenn $u \in D(h_2)$, $w \in L^2$ und $h_2(u, v) = \langle w, v \rangle$ für alle v eines Core von h_2 , ist $u \in D(H_2)$ und $w = H_2 u$.
- 5) $D(|H_2|^{1/2}) = D(h_2)$ und

$$h_2(u, v) = \langle (\operatorname{sgn} H_2) |H_2|^{1/2} u, |H_2|^{1/2} v \rangle \quad (u, v \in D(h_2)).$$

Beweis

1) - 4) folgen unmittelbar aus Lemma 5.12 und ([9], Kap. 6, §2, Theorem 2.1, 2.6).

zu 5): Aus dem Beweis zu Satz 4.2 (1.16.1, c) folgt, daß $D(H_2)$ ein Core für die abgeschlossene Sesqui-Linearform $\tilde{h}_2$, definiert durch $D(\tilde{h}_2) := D(|H_2|^{1/2})$ und $h_2(u, v) := \langle (\operatorname{sgn} H_2) |H_2|^{1/2} u, |H_2|^{1/2} v \rangle$. Wegen Satz 5.17, 2, 3 ist $h_2|_{D(H_2)} = h_2|_{D(H_2)}$ und $D(H_2)$ ein Core von h_2 , daher ist $\tilde{h}_2 = h_2$.

(5.18) Folgerung

- 1) Mit H_1, H_2, K, A, B, C ist (K1) erfüllt.
- 2) $\epsilon_w(H_1) = \epsilon_w(H_2)$.

Beweis

zu 1): Mit den bisher bewiesenen Ergebnissen sieht man, daß mit $\theta = 1/2$ alle Voraussetzungen von Satz 3.1 erfüllt sind, so daß (K1) gilt.

zu 2): B ist H_1 -kompakt. Wegen (K1)c ist dann $R_1(z) - R_2(z) \in B_\infty(L^2)$ ($z \in \mathbb{C}$, $\text{Im } z \neq 0$). Infolgedessen ist $\zeta_w(H_1) = \zeta_w(H_2)$ ([18], Kap. 1, Theorem 4.7).

Zum Nachweis von (K3,I) wird zunächst ein Hilfssatz bewiesen, der eine diesem Zweck angepaßte Version von ([19], Lemma 4.8 und 4.3) ist.

(5.19) Lemma

Sei $q \in M_n$. Dann ist $e^{-|\cdot|^2} * (qu) \in L_\sigma^2$ ($u \in S$, $\sigma \in \mathbb{R}$). Die lineare Abbildung

$$G_\sigma(q) : (S, \|\cdot\|_S) \rightarrow L_\sigma^2, \quad u \mapsto e^{-|\cdot|^2} * (qu),$$

ist stetig und hat deshalb eine stetige Fortsetzung $G_\sigma(q) \in B(L_\sigma^2)$. Es gilt $G_\sigma(q) = G_{\sigma'}(q)|_{L_\sigma^2}$, wenn $\sigma' \leq \sigma$.

Beweis

1) Sei $q_\sigma := P_{-\sigma} q$ und $\tilde{q}_\sigma(x) := P_{2\sigma}(x) \int |q_\sigma(y)|^2 e^{-|x-y|^2} dy$ ($x \in \mathbb{R}^n$). Dann ist $\tilde{q}_\sigma \in L^\infty$.

Für $k \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}^n$ sei

$$A_k(x) := P_{2\sigma}(x) \left(\int_{k-1 \leq |x-y| \leq k} P_{-2\sigma}(y) |q(y)|^2 e^{-|x-y|^2} dy \right).$$

Wenn $|x-y| \leq k$, ist $P_{2\sigma}(x) \leq 3^\sigma k^{2\sigma} P_{2\sigma}(y)$, falls $\sigma \geq 0$, und $P_{-2\sigma}(y) \leq 3^{-\sigma} k^{-2\sigma} P_{-2\sigma}(x)$, falls $\sigma < 0$. Demnach ist

$$A_k(x) \leq 3^{|\sigma|} k^{2|\sigma|} \left(\int_{k-1 \leq |x-y| \leq k} |q(y)|^2 e^{-|x-y|^2} dy \right).$$

Die Menge $\{y \in \mathbb{R}^n; k-1 \leq |x-y| \leq k\}$ wird durch mk^{n-1} Mengen vom Typ $\{y \in \mathbb{R}^n; |\tilde{x}-y| \leq 1\}$ überdeckt, wobei m nicht von k abhängt; ferner gilt $e^{-t^2} \leq c_\sigma (1+|t|)^{-n-1-|2\sigma|}$ ($t \in \mathbb{R}$) mit einer geeigneten Konstanten c_σ , so daß

$$A_k(x) \leq 3^{|\sigma|} k^{2|\sigma|} m k^{n-1} k^{-n-1-|2\sigma|} M_n(q) \leq c_{q,\sigma} k^{-2},$$

wobei $c_{q,\sigma} := 3^{|\sigma|} m M_n(q)$. Damit erhält man

$$\tilde{q}_\sigma(x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k(x) \leq c_{q,\sigma} \sum_{k=1}^{\infty} k^{-2} < \infty \quad (x \in \mathbb{R}^n).$$

2) Mit $u \in S$ ist $qu \in L^1$ und $e^{-|\cdot|^2} * (qu)$ ist wohldefiniert; ferner ist, wie man der folgenden Abschätzung entnimmt, $e^{-|\cdot|^2} * (qu) \in L^2_{loc}$ und es gilt für jedes $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} & \int_{|x| \leq k} P_{2\sigma}(x) \left| \int e^{-|x-y|^2} q_\sigma(y) P_\sigma(y) u(y) dy \right|^2 dx \\ & \leq \int_{|x| \leq k} P_{2\sigma}(x) \left(\int e^{-|x-y|^2} P_{2\sigma}(y) |u(y)|^2 dy \right) dx \\ & \leq c'_{q,\sigma} \iint e^{-|x-y|^2} P_{2\sigma}(y) |u(y)|^2 dx dy \leq c''_{q,\sigma} \|u\|_\sigma^2. \end{aligned}$$

Infolgedessen ist $e^{-|\cdot|^2} * (qu) \in L^2_\sigma$; $G_\sigma(q): (3, \infty) \rightarrow L^2_\sigma$ ist stetig und besitzt eine stetige Fortsetzung in $B(L^2_\sigma)$. Falls $\sigma' \leq \sigma$, kann L^2_σ stetig in $L^2_{\sigma'}$ eingebettet werden, so daß $G_\sigma(q) = G_{\sigma'}(q)|_{L^2_\sigma}$.

Der nächste Schritt befaßt sich mit der Form von B^* . Analoges gilt für A^* .

Sei

$$\mathcal{J} := \bigoplus_{\mu, \nu=1}^{N+1} \mathcal{J}_{\mu\nu} \quad , \quad \mathcal{J}_{\mu\nu} := \mathcal{S} \quad (1 \leq \mu, \nu \leq N+1).$$

Aus [S 1] III.b.5 folgt, daß $\tilde{b}_{\mu\nu} := P_{\delta/2} b_{\mu\nu}^* \in M_n$ ($1 \leq \mu, \nu \leq N+1$). Da $2^{-n/2} e^{-|\cdot|^2/4} = \mathcal{F}(e^{-|\cdot|^2})$, erhält man für $\varphi = \sum \varphi_{\mu\nu} \in \mathcal{J}$, daß $\pi^{n/2} e^{-|\cdot|^2/4} \mathcal{F}(\tilde{b}_{\mu\nu} P_{-\delta/2} \varphi_{\mu\nu}) = \mathcal{F}(e^{-|\cdot|^2} * (\tilde{b}_{\mu\nu} P_{-\delta/2} \varphi_{\mu\nu})) = (G_{\delta/2}(\tilde{b}_{\mu\nu})(P_{-\delta/2} \varphi_{\mu\nu}))$ ($1 \leq \mu, \nu \leq N+1$).

Sei $G_{1,\mu\nu}^B := G_{\delta/2}(\tilde{b}_{\mu\nu}) \in B(L_{\delta/2}^2)$ ($1 \leq \mu, \nu \leq N+1$), $\varphi \in \mathcal{J}$ und $u \in \mathcal{S}$, so daß $\mathcal{F}u \in C_0^\infty$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \langle \varphi, Bu \rangle_{\mathbb{K}} &= \sum_{\mu, \nu=1}^{N+1} \langle \varphi_{\mu\nu}, b_{\mu\nu}^* \mathcal{F}^* T_{\nu} \mathcal{F} u \rangle = \\ &= \sum_{\mu, \nu=1}^{N+1} \langle \pi^{n/2} e^{-|\cdot|^2/4} \mathcal{F}(\tilde{b}_{\mu\nu} P_{-\delta/2} \varphi_{\mu\nu}), \pi^{n/2} e^{-|\cdot|^2/4} T_{\nu} \mathcal{F} u \rangle = \\ &= \sum_{\mu, \nu=1}^{N+1} \langle \mathcal{F}(G_{1,\mu\nu}^B(P_{-\delta/2} \varphi_{\mu\nu})), \pi^{n/2} e^{-|\cdot|^2/4} T_{\nu} \mathcal{F} u \rangle. \end{aligned}$$

Sei $v \in L(B^*)$ und $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{J}$, so daß $\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k = v$ in $\mathbb{K}$. Dann ist $\lim_{k \rightarrow \infty} G_{1,\mu\nu}^B(P_{-\delta/2} \varphi_{k,\mu\nu}) = \lim_{k \rightarrow \infty} G_{1,\mu\nu}^B(P_{-\delta/2} v_{\mu\nu})$ in $L_{\delta/2}^2$ und erstreckt in L^2 . Infolgedessen ist

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F} B^* v, \mathcal{F} u \rangle &= \langle B^* v, u \rangle = \langle v, Bu \rangle_{\mathbb{K}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \langle \varphi_k, Bu \rangle_{\mathbb{K}} = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{\mu, \nu=1}^{N+1} \langle \mathcal{F}(G_{1,\mu\nu}^B(P_{-\delta/2} \varphi_{k,\mu\nu})), \pi^{n/2} e^{-|\cdot|^2/4} T_{\nu} \mathcal{F} u \rangle = \\ &= \sum_{\mu, \nu=1}^{N+1} \langle \mathcal{F}(G_{1,\mu\nu}^B(P_{-\delta/2} v_{\mu\nu})), \pi^{n/2} e^{-|\cdot|^2/4} T_{\nu} \mathcal{F} u \rangle. \end{aligned}$$

Mit $g_{\nu} := \pi^{n/2} e^{-|\cdot|^2/4} T_{\nu}^*$ ($1 \leq \nu \leq N+1$) ist $g_{\nu} \chi_{\text{supp } \mathcal{F}u} \in L^\infty$, so daß aus der vorherigen Gleichung folgt, daß

$$(5.20) \quad (\mathcal{F} B^* v)(x) = \sum_{\mu, \nu=1}^{N+1} g_{\nu}(x) (\mathcal{F}(G_{1,\mu\nu}^B(P_{-\delta/2} v_{\mu\nu}))(x))$$

L-f.ü. in $\mathbb{R}^n$, wobei die rechte Seite in L_{loc}^2 enthalten ist.

T_v^* ist lokal hölderstetig in $\mathbb{R}^n \setminus \bar{I}^{-1}(\Lambda) \supset \Omega_I$, so daß $g_\mu|_{\Omega_I}$ lokal hölderstetig ist. Ferner ist Ψ_I stetig differenzierbar in $I \times \Sigma_I$ und Σ_λ kompakt ($\lambda \in I$). Folglich gibt es zu jedem Intervall $I' \subset I$ eine Konstante $c_{I'}$, und einen Hölderexponenten $\theta_{I'} \in (0, 1]$, so daß

$$(5.21) \quad \begin{aligned} |g_v(\Psi_I(\lambda, w))| &\leq c_{I'}, & (\lambda, \lambda' \in I', w \in \Sigma_I) \\ |g_v(\Psi_I(\lambda, w)) - g_v(\Psi_I(\lambda', w))| &\leq c_{I'} |\lambda - \lambda'|^{\theta_{I'}}. \end{aligned}$$

Sei $P_{-\delta/2} \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ und $f_{1,\mu}^B \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, ist mit

$$(5.22) \quad T_I(\lambda, B)v := \sum_{\mu, \nu=1}^{N+1} g_v(\Psi_I(\lambda, \cdot)) (\Gamma_I(\lambda)) f_{1,\mu}^B(P_{-\delta/2} v_{\mu\nu})$$

($\lambda \in I, v \in \mathbb{K}$) ein linearer Operator $T_I(\lambda, B) \in B(\mathbb{K}, M_I)$ definiert. $T_I(\cdot, B): I \rightarrow B(\mathbb{K}, M_I)$ ist bzgl. der Norm in $B(\mathbb{K}, M_I)$ lokal hölderstetig. In einem Intervall $I' \subset I$ ist $\theta, 0 < \theta \leq \theta_{I'}, 0 < \theta < \min\{(\delta-1)/2, 1\}$, falls $\delta \leq 3$, $\theta \in (0, \theta_{I'}] \cap (0, 1]$, falls $\delta > 3$, ein zulässiger Hölderexponent.

Für ein $f \in H^{\infty, \infty}$ gilt $\Gamma_I(\lambda)f = (\Gamma_I \chi_{\Omega_I} f)(\lambda) = \chi_{I'}(\lambda)(\Gamma_I \chi_{\Omega_I} f)(\lambda)$ L-f.ü. in $I' \subset I$. Zusammen mit Bemerkung 4.10 folgt aus (5.20) für $v \in D(B^*)$

$$\begin{aligned} (F_I E_1(I) B^* v)(\lambda) &= (\Gamma_I \chi_{\Omega_I} f B^* v)(\lambda) = \chi_{I'}(\lambda) (\Gamma_I \chi_{\Omega_I} f B^* v)(\lambda) \\ &= \chi_{I'}(\lambda) \sum_{\mu, \nu=1}^{N+1} g_v(\Psi_I(\lambda, \cdot)) (\Gamma_I \chi_{\Omega_I} f (G_{1,\mu}^B(P_{-\delta/2} v_{\mu\nu}))) (\lambda) \\ &= \chi_{I'}(\lambda) T_I(\lambda, B)v \quad \text{L-f.ü. in } I' \subset I. \end{aligned}$$

Daraus erhält man $(F_I E_1(I) B^* v)(\lambda) = T_I(\lambda, B)v$ L-f.ü. in I .

Entsprechendes gilt für A^* : Mit $\tilde{a}_{\mu\nu} := P_{\delta/2} a_{\mu\nu}^* \in M_n$ und $G_{1,\mu\nu}^A(\tilde{a}_{\mu\nu}) := G_{\delta/2}(\tilde{a}_{\mu\nu})$ ersetzt man B^* durch A^* , g_ν durch g_μ und $G_{1,\mu\nu}^B$ durch $G_{1,\mu\nu}^A$, um in (5.20) das analoge Ergebnis für $v \in D(A^*)$ zu erhalten. Dementsprechend ist

$$(5.23) \quad T_I(\lambda, A)v := \sum_{\mu, \nu=1}^{N+1} E_{\mu\nu}(\Psi_I(\lambda, \cdot)) \tilde{r}_I(\lambda) G_{1,\mu\nu}^A(P_{-\delta/2} v_\mu).$$

($\lambda \in I$, $v \in K$) und $T_I(\lambda, A)$ hat die gleichen Eigenschaften wie $T_I(\lambda, B)$. Insbesondere gilt

$$(F_I E_1(I) A^* v)(\lambda) = T_I(\lambda, A) v \quad (L\text{-f.ü. in } I, v \in D(A^*)),$$

so daß mit $D := D(A^*)$ und $D' := D(B^*)$ (K3, I) erfüllt ist.

Damit ist der Beweis zu Theorem 1.16 vollständig.

§ 6 Der Beweis von Theorem 1.17

Man sieht unmittelbar, daß aus [S 1]' die Voraussetzungen [S 1] folgen. Theorem 1.17 wird deshalb als Zusatz zu Theorem 1.16 betrachtet, so daß der vorherige Beweis zu Theorem 1.16 wörtlich übernommen werden kann.

Die Aussage über das singuläre Spektrum von H_2 in $[\lambda_{\min}, \infty) \setminus \Lambda$ folgt dann aus Satz 3.15 und Bemerkung 3.16, wenn noch die Bedingungen (K6) - (K8), (K9, I)', (K10) und (K11) verifiziert werden. Dementsprechend ist dieser Abschnitt gegliedert.

Erkennt einige Bemerkungen zu den Räumen $\mathcal{V}$ bzw. $\mathcal{X}$ (S.46):

Mit ([24], I.10) ist $\mathcal{V}$ die Menge aller Cauchy-Folgen $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in $\mathcal{V}_0 = D(A)$ bzgl. der Norm $\|u\|_{\mathcal{V}_0} = \|Au\|_{\mathbb{K}}$, wobei Cauchy-Folgen mit der Äquivalenzrelation $(u_k)_{k \in \mathbb{N}} \sim (v_k)_{k \in \mathbb{N}}$, wenn $\lim_{k \rightarrow \infty} \|u_k - v_k\|_{\mathcal{V}_0} = 0$, in Klassen eingeteilt werden. $D(A)$ und damit auch $D(A_0) = H^{r/2, 2}$ ist in der Weise in $\mathcal{V}$ eingebettet, daß jedem $u \in D(A)$ ($D(A_0)$) die Folge $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$, $u_k := u$, und damit die Äquivalenzklasse $[(u_k)]$ zugeordnet wird und man sagt, daß $u = [(u_k)] \in D(A)$ ($D(A_0)$). Die Norm in $\mathcal{V}$ ist durch $\|[(u_k)]\|_{\mathcal{V}} := \lim_{k \rightarrow \infty} \|u_k\|_{\mathbb{K}}$ definiert.

Sei $[(u_k)] \in \mathcal{V}$. Da $\overline{\text{graph } A_0}^{\mathbb{L}^2, \mathbb{K}} = \text{graph } A$, gibt es zu jedem u_k ein $v_k \in D(A_0)$ mit $\|Au_k - A_0 v_k\|_{\mathbb{K}} \leq k^{-1}$. Infolgedessen ist $(v_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\mathcal{V}_0$ und $(u_k)_{k \in \mathbb{N}} \sim (v_k)_{k \in \mathbb{N}}$, das heißt, daß die Repräsentanten der Klassen in $\mathcal{V}$ als Folgen in $D(A_0)$ gewählt werden können. Ebenso ist $\mathcal{X} = \overline{\mathcal{V}}^{\mathbb{K}}$.

Für den Nachweis der Bedingungen (K6) - (K8), (K9,I)', (K10) und (K11) hat θ den Wert $\theta := 1/2$. Deshalb ist $D_\theta = D_{1-\theta} = H^{r/2,2} = D(A_0)$.

Aus den vorherigen Bemerkungen über $\mathbb{V}$ folgt bereits (K6).

Der im Folgenden benötigte positive selbstadjungierte Operator $A_1 \in B(K)$ wird durch

$$A_1 : K \rightarrow K, \quad \{(A_1 u)_{\mu\nu}\} := \{P_{\delta/2} u_{\mu\nu}\},$$

definiert. Man sieht sofort, daß A_1 die genannten Eigen-

schaften hat. A_1^{-1} ist dann gegeben durch $A_1^{-1} = P_{\delta/2} u_{\mu\nu}$.

Dementsprechend ist $\|A_1^{-1}\|_{K \rightarrow K} = \|P_{\delta/2}\|_{L^2 \rightarrow L^2} = 1$ und

$$K = \bigoplus_{\mu, \nu=1}^{N+1} L^2_{\mu\nu} \text{ mit der Norm } \|u\|_{K^2} := \left(\sum_{\mu, \nu=1}^{N+1} \|u_{\mu\nu}\|_{L^2}^2 \right)^{1/2}.$$

ferner ist der Unitar $A_1^{-1} : L^2_{\mu\nu} \rightarrow K_1$ durch

$$(A_1^{-1} u)_{\mu\nu} = P_{(\gamma-\gamma')} \delta/2 u_{\mu\nu} \quad (1 \leq \mu, \nu \leq N+1) \text{ gegeben. Dann sei}$$

$$D(G) := D(A), \quad Gu := A_1^{-1,0} Au \quad (u \in D(G)).$$

Offensichtlich ist $Gu \in K_{-1}$ ($u \in D(G)$) und $A = A_1^{-1,0}$, daB (K7) erfüllt ist.

Infolge der zusätzlichen Voraussetzungen in [S 1]'III ist

$$P_{\delta/2} a_{\mu\nu} \delta^* T_{\mu} f u \in L^2 \quad (u \in H^{r/2,2}) \text{ und } Q(P_{\delta/2} a_{\mu\nu}) \delta^* T_{\mu} f \text{ in}$$

$B(H^{r/2,2}, L^2)$ enthalten (vgl. Lemma 5.9,1) ($1 \leq \mu, \nu \leq N+1$).

Zusammen mit (4.4) folgt daraus

$$G(H^{r/2,2}) \subset K, \quad \|Gu\|_K \leq c(\|H_1\|^{1/2} \|u\| + \|u\|) \quad (u \in H^{r/2,2})$$

mit einer geeigneten Konstanten c . Damit ist (K8) gezeigt.

Wegen [S 1]'II.b kann in (5.21) für jedes Intervall $I' \subset I$

$\theta_{I'} = \beta$ gesetzt werden. Mit Lemma 5.19 ist

$G_{\gamma, \mu\nu}^B := G_{\gamma\delta/2}(P_{\delta/2} b_{\mu\nu}^*) \in B(L_{\gamma\delta/2}^2)$ und $\delta G_{\gamma, \mu\nu}^B \in B(L_{\gamma\delta/2}^2, H^{\gamma\delta/2, 2})$
($\gamma \geq 0$, $1 \leq \mu, \nu \leq N+1$). Ferner sei

$$(6.1) \quad \phi_{\gamma}^B(\lambda)u := \sum_{\mu, \nu=1}^{N+1} g_{\nu}(\Psi_I(\lambda, \cdot)) \tilde{\Gamma}_I(\lambda) \delta G_{\gamma, \mu\nu}^B(u_{\mu\nu})$$

($u \in \mathbb{K}_{\gamma}$, $\gamma \geq 1$, $\lambda \in I$). Dann ist $\phi_{\gamma}^B(\lambda) \in B(\mathbb{K}_{\gamma}, \mathbb{M}_I)$ ($\gamma \geq 1$, $\lambda \in I$)

und die Abbildung $\phi_{\gamma}^B(\cdot) : I \rightarrow B(\mathbb{K}_{\gamma}, \mathbb{M}_I)$ ist in I lokal

hölderstetig bzgl. der Norm in $B(\mathbb{K}_{\gamma}, \mathbb{M}_I)$. In jedem Inter-

vall $I' \subset I$ ist ϵ , $0 < \epsilon \leq \beta$, $0 < \epsilon < \min\{(\gamma\delta - 1)/2, 1\}$, falls

$\gamma\delta \leq 3$, $\epsilon \in (0, \beta] \cap (0, 1]$, falls $\gamma\delta > 3$, ein zulässiger Hölder-
exponent für $\phi_{\gamma}^B(\cdot)$.

Da $\|C^*u\|_{\mathbb{K}_{\gamma}} = \|Cu\|_{\mathbb{K}_{\gamma}} \leq \|u\|_{\mathbb{K}_{\gamma}}$ und $A_1^{\gamma+1, \gamma}u = A_1^{1, 0}u = \{P_{-\delta/2}u_{\mu\nu}\}$
($u \in \mathbb{K}_{\gamma}$, $\gamma \geq 0$), ist mit (5.22)

$$(6.2) \quad T_I(\lambda, B)C^*u = \phi_{\gamma+1}^B(\lambda)A_1^{\gamma+1, \gamma}C^*u \quad (u \in \mathbb{K}_{\gamma}, \gamma \geq 0, \lambda \in I).$$

Man verifiziert ohne Mühe, daß mit einem δ' , $\delta > \delta' > 1$, da

$$\epsilon_{\gamma} := \min\{\gamma/2 + (\delta' - 1)/2, \beta, 1\} \quad (\gamma \geq 0)$$

ein zulässiger Hölderexponent für $\phi_{\gamma+1}^B(\cdot)$ ist.

$\rho_0 := (\delta' - 1)/2 > 0$ und $\beta > 1/2$ sind von γ unabhängig. Daher

gibt es zu jedem Intervall $I' \subset I$ und $\gamma \geq 0$ eine Konstante

$c_{I', \gamma}$, so daß

$$\begin{aligned} & \| (T_I(\lambda, B)C^* - T_I(\lambda', B)C^*)u \|_{\mathbb{M}_I} \\ &= \| (\phi_{\gamma+1}^B(\lambda) - \phi_{\gamma+1}^B(\lambda'))A_1^{\gamma+1, \gamma}C^*u \|_{\mathbb{M}_I} \\ &\leq c_{I', \gamma} |\lambda - \lambda'|^{\epsilon_{\gamma}} \| A_1^{\gamma+1, \gamma}C^*u \|_{\mathbb{K}_{\gamma+1}} \leq c_{I', \gamma} |\lambda - \lambda'|^{\epsilon_{\gamma}} \| u \|_{\mathbb{K}_{\gamma}} \end{aligned}$$

($u \in K_1$, $\gamma \geq 0$, $\lambda, \lambda' \in I'$). Damit ist $(K_9, I)'$ bewiesen.

Sei $y \in Y$, so daß $Ay \in K_1$. Aufgrund der Bemerkungen über Y ist $y = [(u_k)]$ mit einer Folge $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in $H^{r/2, 2}$, für die $\limsup_{k \rightarrow \infty} \limsup_{l, m \geq k} \|Au_l - Au_m\|_K = 0$. Dann ist $v := Ay = \lim_{k \rightarrow \infty} Au_k$ in K .

Speziell für $v_0 := N+1$ heißt das $\limsup_{k \rightarrow \infty} \limsup_{l, m \geq k} \|(Au_l)_{v_0, v_0} - (Au_m)_{v_0, v_0}\| = \limsup_{k \rightarrow \infty} \limsup_{l, m \geq k} \|u_l - u_m\|_{r/2, -r/2, 2} = 0$. Demnach ist $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $H^{r/2, 2}$ und konvergiert wegen der Vollständigkeit dieses Raumes gegen ein $\tilde{u} \in H^{r/2, 2}$. Für u gilt deshalb $P_{-\delta/2} f^* P_{r/2} \tilde{u} = \lim_{k \rightarrow \infty} P_{-\delta/2} f^* P_{r/2} u_k$ in L^2 , so daß $P_{-\delta/2} f^* P_{r/2} \tilde{u} = v_{N+1, N+1}$; ferner ist $\tilde{u} \in L^2_{-\delta/2}$ und $\lim_{k \rightarrow \infty} u_k = \tilde{u}$ in $L^2_{-\delta/2}$. Weil $v \in K_1$, ist $v_{N+1, N+1} \in L^2_{\delta/2}$ und daher $f^* P_{r/2} \tilde{u} \in L^2$, d.h. $\tilde{u} \in H^{r/2, 2}$.

Sei $\varphi \in S$, so daß $f P_{-\delta/2} \varphi \in C_0^\infty$. Dann ist, da $T_\mu \in H^1_{loc}$, $T_\mu f P_{-\delta/2} \varphi \in H^1_{-2}$ und, da $1-\delta < 2$, $P_{+\delta/2} f^* T_\mu f P_{-\delta/2} \varphi \in L^2$ ($1 \leq \mu \leq N+1$). Infolgedessen ist

$$\begin{aligned} & \langle P_{-\delta/2} f^* T_\mu f \tilde{u} - v_{\mu, N+1}, \varphi \rangle \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \langle P_{-\delta/2} f^* T_\mu f \tilde{u} - P_{-\delta/2} f^* T_\mu f u_k, \varphi \rangle = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \langle P_{-\delta/2} (\tilde{u} - u_k), P_{+\delta/2} f^* T_\mu f P_{-\delta/2} \varphi \rangle = 0 \quad (1 \leq \mu \leq N). \end{aligned}$$

$\{\varphi \in S; f P_{-\delta/2} \varphi \in C_0^\infty\}$ ist dicht in L^2 , folglich ist

$$P_{-\delta/2} f^* T_\mu f \tilde{u} = v_{\mu, N+1} \quad (1 \leq \mu \leq N).$$

$\lim_{k \rightarrow \infty} Au_k = v$ in K bedeutet, daß $\lim_{k \rightarrow \infty} (Au_k)_{\mu, \nu} = v_{\mu, \nu}$ in L^2 ($1 \leq \mu, \nu \leq N+1$). Deshalb gilt jeweils $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{\mu, \nu}(x) (f^* T_\mu f u_k)(x) = v_{\mu, \nu}(x)$ L-f.ü. in $\mathbb{R}^n$, wobei diese punktweise Konvergenz o.E. für die ganze Folge $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ zutrifft.

Daraus folgt, weil $P_{-\delta/2} \delta^* T_\mu \hat{u} = v_{\mu, N+1}$ ($1 \leq \mu \leq N+1$) und $P_{-\delta/2} \hat{x} \neq 0$ ($\hat{x} \in \mathbb{R}^n$), $\lim_{k \rightarrow \infty} (\delta^* T_\mu u_k)(x) = (\delta^* T_\mu \hat{u})(x)$ L-f.ü. in $\mathbb{R}^n$, so daß für $1 \leq \mu, v \leq N+1$

$$(a_{\mu\nu} \delta^* T_\mu \hat{u})(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} (a_{\mu\nu} \delta^* T_\mu u_k)(x) = v_{\mu\nu}(x)$$

L-f.ü. in $\mathbb{R}^n$. Infolgedessen ist $\tilde{A} \tilde{u} = v$, also

$y = [(v_k)] = \tilde{u} \in H^{r/2, 2}$, wobei $v_k := \tilde{u}$ ($k \in \mathbb{N}$). Schließlich ist $\tilde{u} = \delta^* P_{r/2} \tilde{u} = P_{-\delta/2} \delta^* P_{r/2} \tilde{u}$, $1/2 \leq A \tilde{u}_K$, und (K10) ist bewiesen.

Aus ([9], Kap. IV, §1, Bem. 1.5) folgt $|H_2|^{1/2} \in B(H^{r/2, 2}, L^2)$, da $A : \mathbb{R}(\tilde{A}) := H^{r/2, 2} \rightarrow L^2$, $Au := P_{r/2} \tilde{u}$, abgeschlossen ist.

$$H_j^{r/2, 2}(u, v) = ((\operatorname{sgn} H_j) |H_j|^{1/2} u, |H_j|^{1/2} v) \quad (u, v \in H^{r/2, 2}, j = 1, 2)$$

$$|H_j|^{1/2} \in B(H^{r/2, 2}, L^2), \quad (\operatorname{sgn} H_j) \in B(L^2) \quad (j = 1, 2).$$

Man sieht deshalb, daß es genügt, eine Teilmenge $\tilde{\mathcal{S}} \subset \mathcal{S}$ anzugeben, so daß $\tilde{\mathcal{S}} \subset H^{r/2, 2}$ und $\tilde{\mathcal{S}}$ dicht in $H^{r/2, 2}$ ist, um damit (K11) nachzuweisen.

Sei

$$\tilde{\mathcal{S}} := \{ \delta^* \varphi; \varphi \in C_0^\infty, \operatorname{supp} \varphi \subset \mathbb{R}^n \setminus Z \}.$$

$\mathcal{S}$ ist eine dichte Teilmenge von $H^{r/2, 2}$ und in $\mathcal{S}$ enthalten.

Zunächst ist $\{ \delta^* \psi; \psi \in C_0^\infty \}$ dicht in $H^{r/2, 2}$ und

$\{ \varphi \in C_0^\infty; \operatorname{supp} \varphi \subset \mathbb{R}^n \setminus Z \}$ dicht in L^2 , da Z eine abgeschlossene L-Nullmenge in $\mathbb{R}^n$ ist. Anhand der Ungleichung für $u \in H^{r/2, 2}$, $\psi \in C_0^\infty$ und $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \setminus Z)$,

$$\begin{aligned} \|u - \delta^* \varphi\|_{r/2, 2} &\leq \|u - \delta^* \psi\|_{r/2, 2} + \|\delta^* \psi - \delta^* \varphi\|_{r/2, 2} \\ &= \|u - \delta^* \psi\|_{r/2, 2} + \|P_{r/2}(\psi - \varphi)\|, \end{aligned}$$

sieht man unmittelbar, daß $\tilde{\mathbf{S}}$ dicht in $H^{r/2,2}$ ist.

Sei $u := f^* \varphi \in \tilde{\mathbf{S}}$, $v \in \mathbf{S}$. Dann ist $P_{-r/2} f u = P_{-r/2} \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \setminus Z)$.

Demnach ist, da $T|_{\mathbb{R}^n \setminus Z}$ k_n -mal stetig differenzierbar ist und $1 < \delta \leq 2$, $TP_{-r/2} f u \in H^{1,2}$, also $P_{\delta/2} f^* TP_{-r/2} f u \in L^2$.

Ferner ist, da $u \in \mathbf{S}$, auch $P_{\delta/2} f^* P_{-r/2} f u \in \mathbf{S}$. Mit

$c_u := \max\{|P_{-r/2} f^* TP_{-r/2} f u|, |P_{\delta/2} f^* P_{-r/2} f u|\}$ gilt dann

$$|h_1(u, v)| = |\langle (\operatorname{sgn} H_1) |H_1|^{1/2} u, |H_1|^{1/2} v \rangle| = |\langle H_1 u, v \rangle|$$

$$= |\langle T f u, f v \rangle| = |\langle P_{\delta/2} f^* TP_{-r/2} f u, P_{-\delta/2} f^* P_{r/2} f v \rangle|$$

$$\leq c_u \| (A v)_{N+1, N+1} \| \leq c_u \| A v \|_{\mathbb{K}} = c_u \| v \|_{\mathbf{Y}}$$

und

$$|\langle u, v \rangle| = |\langle P_{\delta/2} f^* P_{-r/2} f u, P_{-\delta/2} f^* P_{r/2} f v \rangle|$$

$$\leq c_u \| A v \|_{\mathbb{K}} = c_u \| v \|_{\mathbf{Y}}.$$

Da $|H_1|^{1/2} \in B(H^{r/2,2}, L^2)$, $A \in B(H^{r/2,2}, \mathbb{K})$ und $\mathbf{S}$ dicht in $H^{r/2,2}$ ist, folgt aus den beiden Abschätzungen, daß

$$|h_1(u, v)| + |\langle u, v \rangle| \leq 2c_u \| v \|_{\mathbf{Y}} \quad (v \in H^{r/2,2}),$$

das heißt $\tilde{\mathbf{S}} \subset \mathbf{S}$. Damit ist die letzte Bedingung (K11) bewiesen und der Beweis zu Theorem 1.17 vollständig.

§ 7 Der Beweis von Folgerung 1.18 und Theorem 1.19

Wie man sieht, folgt [S 1] aus [S 3] und [S 1]' aus [S 3]'. Demnach ist die Folgerung 1.18 bewiesen, wenn darin I.2 nachgewiesen wird.

Aus [S 3]III.a folgt durch Anwendung des (Interpolations-) Satzes 4.11, daß

$Q(q_{\mu\nu}) \in B(H^{r/2,2})$ und $\|q_{\mu\nu}u\|_{r/2,2} \leq C_{\mu\nu}^{\theta_0} C_{\mu\nu}^{1-\theta_0} \|u\|_{r/2,2}$
 ($u \in H^{r/2,2}$, $1 \leq \mu, \nu \leq N$), wenn θ_0 wie in [S 3]III.a definiert wird, weil dann $H^{r/2,2} = [H^{s,2}, H^{0,2}]_{1-\theta_0}$. Daher ist durch

$$D(V) := H^{r,2}, \quad \forall u := \sum_{\mu, \nu=1}^N f^* T_{\mu}^* f(q_{\mu\nu} f^* T_{\nu} f u) \quad (u \in H^{r,2}),$$

$V : D(V) \rightarrow L^2$ wohldefiniert. Da $\|f^* T_{\nu} f u\|_{r/2,2} \leq t_{\nu} \|u\|_{r/2,2}$ ($u \in H^{r,2}$) und $\|f^* T_{\mu}^* f v\| \leq t_{\mu} \|v\|_{r/2,2}$ ($v \in H^{r/2,2}$) ($1 \leq \mu, \nu \leq N$), folgt mit der obigen Abschätzung für $q_{\mu\nu}u$, (1.14) und (1.7) (wobei c_1, c_2, c_3 den Wert C_1, C_2, C_3 haben)

$$\begin{aligned} \|Vu\| &\leq \sum_{\mu, \nu=1}^N t_{\mu} \|q_{\mu\nu} f^* T_{\nu} f u\|_{r/2,2} \\ &\leq \sum_{\mu, \nu=1}^N t_{\mu} C_{\mu\nu}^{\theta_0} C_{\mu\nu}^{1-\theta_0} \|f^* T_{\nu} f u\|_{r/2,2} \leq C_0''' \|u\|_{r/2,2} \\ &\leq 2^{1/2} C_1^{-1} C_0''' \|H_1 u\| + 2^{1/2} C_1^{-1} C_3 C_0''' \|u\| \quad (u \in H^{r/2}). \end{aligned}$$

Demnach ist, da $2^{1/2} C_1^{-1} C_0''' < 1$, V H_1 -beschränkt mit einer H_1 -Schranke $c < 1$. Ferner ist V unter den angegebenen Voraussetzungen symmetrisch. Folglich ist $\tilde{H}_2 := H_1 + V$ mit $D(\tilde{H}_2) := D(H_1) = H^{r/2}$ selbstadjungiert.

Für $u \in H^{r,2}$, $v \in H^{r/2,2}$ und $h_2, H_2, h_{\mu\nu}, g_{\mu\nu}$ aus dem Beweis zu Theorem 1.16 folgt

$$\begin{aligned} \langle \tilde{H}_2 u, v \rangle &= \langle H_1 u, v \rangle + \sum_{\mu, \nu=1}^N \langle \delta^* T_\mu^* \delta (q_{\mu\nu} \delta^* T_\nu \delta u), v \rangle = \\ &= h_1(u, v) + \sum_{\mu, \nu=1}^N \langle h_{\mu\nu} \delta^* T_\nu \delta u, g_{\mu\nu}^* \delta^* T_\mu \delta v \rangle = h_2(u, v). \end{aligned}$$

Aus Satz 5.17,4 folgt, daß $u \in D(H_2)$ und $\tilde{H}_2 u = H_2 u$, also $\tilde{H}_2 = H_2$.

Zum Beweis von Theorem 1.19 wird zunächst der Operator H_2 definiert. Dann wird wie im Beweis zu Theorem 1.16 und 1.17 verfahren, indem entsprechend den Voraussetzungen [S 2] bzw. [S 2]' die Bedingungen (K1), ..., (K5, I) bzw. (K1), ..., (K11) verifiziert werden.

Zu Theorem 1.19,1 ist nichts mehr zu beweisen. Die Konstanten c_1, c_2, c_3 in (1.7) haben den Wert C_1'', C_2'', C_3'' . Es gilt daher

$$(7.1) \quad \|u\|_{r/2} \leq C_1''^{-1} 2^{1/2} \| |H_1| u \| + C_1''^{-1} C_3'' 2^{1/2} \|u\| \quad (u \in H^{r,2}).$$

In (7.1) kann $|H_1|$ durch H_1 ersetzt werden. Ferner ist $H_1 \in B(H^{r,2}, L^2)$.

Aus [S 2] folgt, daß auch q_μ ($1 \leq \mu \leq N$) die Voraussetzungen [S 2]III.2,3 erfüllen. Deshalb ist durch

$$D(V) := H^{r,2}, \quad Vu := \sum_{\mu=1}^N q_\mu \delta^* T_\mu \delta u \quad (u \in H^{r,2}),$$

$V : D(V) \rightarrow L^2$ wohldefiniert und $V \in B(H^{r,2}, L^2)$ (Lemma 5.2,1). Da jeweils $Q(q_\mu) \delta^* T_\mu \delta \in B(H^{r,2}, L^2)$ und C_0^∞ dicht in $H^{r,2}$ ist, folgt aus [S 2]IV durch stetige Fortsetzung, daß V symmetrisch ist.

Mit (1.12) erhält man

$$\left\| \sum_{s_{\mu} < r} q_{\mu} f^* T_{\mu} f u \right\| \leq C_0' \|u\|_{r,2} \quad (u \in H^{r,2})$$

und mit [S 2] III.3 und Lemma 5.2,3 erhält man wie im Beweis zu Lemma 5.12,1 zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Konstante c_{ε} , so daß

$$\left\| \sum_{s_{\mu} < r} q_{\mu} f^* T_{\mu} f u \right\| \leq \varepsilon \|u\|_{r,2} + c_{\varepsilon} \|u\| \quad (u \in H^{r,2}).$$

Aus (7.1) (H_1 statt $|H_1|$) folgt damit, da $C_0' C_1''^{-1} 2^{1/2} < 1$, wenn nur ε genügend klein gewählt wird, daß $V H_1$ beschränkt ist mit einer H_1 -Schranke $c < 1$. Folglich ist $H_2 := H_1 + V$ mit $D(H_2) := D(H_1) = H^{r,2}$ selbstadjungiert; ferner ist $H_2 \in B(H^{r,2}, L^2)$.

Nach wie vor ist $J := [\lambda_{\min}^{(n)}] \setminus \Lambda$ und I eine Zusammenhangskomponente von J .

Entsprechend dem Beweis zu Theorem 1.16 erweitern wir V zu

$$Vu := \sum_{\mu=1}^{2N+1} q_{\mu} f^* T_{\mu} f u,$$

wobei $T_{2N+1} := P_r$, $q_{2N+1} := 0$, $T_{\mu} := T_{\mu-N}$, $q_{\mu} := 0$ ($N+1 \leq \mu \leq 2N$). Demnach werden die Bedingungen in [S 2] auch von den Funktionen q_{μ} , T_{μ} ($1 \leq \mu \leq 2N+1$) erfüllt, dabei ist $t_{2N+1} = 1$, $s_{2N+1} = r$ und $t_{\mu} = t_{\mu-N}$, $s_{\mu} = s_{\mu-N}$ ($N+1 \leq \mu \leq 2N$). Mit der gleichen Begründung wie zuvor wird ohne Einschränkung angenommen, daß $t_{\mu} = 1$ ($1 \leq \mu \leq 2N$).

Nach einer analogen Definition von K , A , B und C können wesentliche Elemente der Begründungen aus dem Beweis zu Theorem 1.16 bzw. 1.17 übernommen werden. Diese Bezugnahme wird abkürzend mit (S 1) bezeichnet, sofern nichts

Genaueres gesagt wird.

Sei

$$\mathbb{K} := \bigoplus_{\mu=1}^{2N+1} \mathbb{K}_{\mu} \quad , \quad \mathbb{K}_{\mu} := L^2 \quad (1 \leq \mu \leq 2N+1) .$$

die äußere Hilbertsumme der Hilberträume $\mathbb{K}_{\mu}$. Die Elemente von $\mathbb{K}$ bezeichnen wir kurz mit $\{u_{\mu}\}$. Die Norm $\|\cdot\|_{\mathbb{K}}$ und das Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{K}}$ wird wie in (S 1) definiert.

Dann sei

$$(7.2) \quad \begin{aligned} D(A_0) &:= H^{r,2} \quad , \quad A_0 : D(A_0) \rightarrow \mathbb{K} \\ (A_0 u)_{\mu} &:= a_{\mu} t^{*} T_{\mu} u \quad (1 \leq \mu \leq 2N+1) \end{aligned}$$

$$(7.3) \quad \begin{aligned} D(B) &:= L^2 \quad , \quad B : L^2 \rightarrow \mathbb{K} \\ (Bu)_{\mu} &:= b_{\mu} u \quad (1 \leq \mu \leq 2N+1) \end{aligned}$$

$$(7.4) \quad \begin{aligned} D(C) &:= \mathbb{K} \quad , \quad C : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K} \\ (Cu)_{\mu} &:= d_{\mu} u_{\mu} \quad (1 \leq \mu \leq 2N+1) , \end{aligned}$$

wobei

$$(7.5) \quad \begin{aligned} a_{\mu} &:= P_{-b/2} \quad , \quad \text{falls } N+1 \leq \mu \leq 2N+1 \\ a_{\mu} &:= h_{\mu} \quad , \quad \text{falls } 1 \leq \mu \leq N \end{aligned}$$

$$(7.6) \quad \begin{aligned} b_{\mu} &:= 0 \quad , \quad \text{falls } N+1 \leq \mu \leq 2N+1 \\ b_{\mu} &:= g_{\mu}^{*} \quad , \quad \text{falls } 1 \leq \mu \leq N \end{aligned}$$

$$(7.7) \quad \begin{aligned} d_{\mu} &:= 0 \quad , \quad \text{falls } N+1 \leq \mu \leq 2N+1 \\ d_{\mu} &:= 1 \quad , \quad \text{falls } 1 \leq \mu \leq N . \end{aligned}$$

(7.8) Lemma

1) A_0, B, C sind wohldefiniert.

$A_0 \in B(H^{r,2}, \mathbb{K})$, $B \in B(L^2, \mathbb{K})$, $\forall_{\mu \in \mathbb{N}} \quad B_{\mu} \in (H^{r,2}, \mathbb{K})$, $C \in B(\mathbb{K}, \mathbb{K})$.

2) A_0 ist abschließbar mit Abschließung A .

A ist injektiv, woraus (K5,1) folgt.

3) $D_1 H_1 \in D(A) \cap D(B)$: E ist H_1 -kompakt, folglich ist (K4) erfüllt.

Beweis

zu 3): Diese Aussagen folgen wie in (S 1) aus 1) und 2)

zu 1): Wie man sieht, sind B und C wohldefiniert,

$B, C \in L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$, entsprechend der allgemeinen Bezeichnung im Beweis zu Lemma 5.9,1 setzt man

$$T_0 := T_\alpha, q := a_\alpha, \gamma := r, s := s_\alpha$$

$$T_0 := 1, q := b_\alpha, \gamma := r/2, s := r/2, \epsilon := \delta/2 \quad (1 \leq \mu \leq 2N+1).$$

Infolgedessen ist A_0 wohldefiniert, $A_0 \in B(H^{r,2}, K)$ und

$$A_0 \in B(H^{r,2}, K).$$

zu 2): Der Beweis von Lemma 5.9,2 ist wörtlich übertragbar, wenn man die Indizes in der folgenden Weise ersetzt:

$(N+1, N+1)$ durch $2N+1$, $\{(u, N+1); 1 \leq u \leq N\}$ durch $\{u; N+1 \leq u \leq 2N\}$, $\{(u, v); 1 \leq u, v \leq N\}$ durch $\{u; 1 \leq u \leq N\}$, $\{(N+1, v); 1 \leq v \leq N\}$ entfällt. Man beachte dabei, daß

$$T_\mu = T_{\mu-N} \quad (N+1 \leq \mu \leq 2N).$$

(7.9) Folgerung

1) Mit H_1, H_2, K, A, B, C ist (K1) erfüllt.

$$2) \quad \epsilon_w(H_1) = \epsilon_w(H_2).$$

Beweis

zu 1): Aufgrund des bisher Bewiesenen folgt, daß

$$D(|H_1|) = D(|H_2|) = H^{r,2}, \quad D(|H_1|^0) = D(|H_2|^0) = L^2.$$

Demnach ist

$$h_1^{(0)}(u,v) = \langle u, H_1 v \rangle, \quad h_2^{(0)}(u,v) = \langle u, H_2 v \rangle \quad \left(\begin{matrix} u \in L^2 \\ v \in H^{r,2} \end{matrix} \right)$$

und $h_2^{(0)}(u,v) = h_1^{(0)}(u,v) + \langle u, Vv \rangle = h_1^{(0)}(u,v) + \langle CBu, Av \rangle_{\mathbb{K}}$,
so daß mit $\theta = 0$ die Voraussetzungen von Satz 3.1 erfüllt
sind. Damit ist (K1) nachgewiesen.

zu 2): Wieder ergibt (K4) und (K1)c, daß $R_1(z) - R_2(z)$
kompakt ist ($z \in \mathbb{C}$, $\text{Im } z \neq 0$), woraus $\zeta_w(H_1) = \zeta_w(H_2)$ folgt
([18], Kap. 1, Theorem 4.7).

(K2, I) ist bereits bewiesen; durch den Nachweis von (K3, I)
wird der Beweis von Theorem 1.19, I vollständig.

Wegen [S 2] III.4, (7.5) und Lemma 5.19 ist

$G_{1,\mu}^A := G_{1/2}(P_{1/2} a_{\mu}^*) \in F(L^{\infty}/2^{1/2} \dots 2^{(N+1)/2})$. Wie in (S 1)
folgt mit $f_{\mu} := \pi^{-n/2} e^{-|\cdot|^2/4T_{\mu}^*}$ ($1 \leq \mu \leq 2N+1$), daß

$$(f_{\mu}^* u)'(x) = \sum_{\mu=1}^{2N+1} f_{\mu}'(x) \cdot (G_{1,\mu}^A)'(x) \quad (x \in \mathbb{R}^n)$$

L -f.ü. in $\mathbb{R}^n$. T_{μ}^* ist lokal hölderstetig in $\mathbb{R}^n \setminus \tilde{T}^{-1}(\Lambda) \supset \Omega_I$.
Wenn $I' \subset \subset I$ ein Intervall ist und $\theta_I \in (0, 1]$ der Hölder-
exponent von T_{μ}^* in Ω_I , ist, gelten für f_{μ} die gleichen
Abschätzungen wie in (5.21). Deshalb wird durch

$$T_I(\lambda, A)u := \sum_{\mu=1}^{2N+1} f_{\mu}(\Psi_I(\lambda, \cdot)) \tilde{\Gamma}_I(\lambda) G_{1,\mu}^A(P_{1/2} u_{\mu}) \quad \left(\begin{matrix} \lambda \in I \\ u \in \mathbb{K} \end{matrix} \right)$$

ein linearer Operator $T_I(\lambda, A) \in B(\mathbb{K}, M_I)$ definiert.

$T_I(\cdot, A) : I \rightarrow B(K, M_I)$ ist bzgl. der Norm in $B(K, M_I)$ lokal h"olderstetig. Der H"olderexponent in einem Intervall $I' \subset\subset I$ ist wie in (S 1) festgelegt. Ferner gilt f"ur $u \in D(A^*)$

$$T_I(\lambda, A)u = (F_I E_1(I) A^* u)(\lambda) \quad (L\text{-f.} \ddot{u}. \text{ in } I).$$

Wegen [S 2]III.4, (7.6) und Lemma 5.19 ist

$G_{1,\mu}^B := G_{\delta/2}(P_{\delta/2} b_{\mu}^*) \in B(L_{\delta/2}^2)$ ($1 \leq \mu \leq 2N+1$). Wie in (S 1) folgt mit $g := \pi^{-n/2} e^{-|\cdot|^2/4}$, da

$$(\{B^* u\})(x) = \frac{2N+1}{\alpha=1} g(x) (\{G_{1,\mu}^B(P_{-\delta/2} u_{\alpha})\})(x) \quad (u \in D(B^*) = K)$$

L -f. $\ddot{u}.$ in $\mathbb{R}^n$. Die Funktion g ist in $\mathbb{R}^n$ lokal Lipschitzstetig. Deshalb gibt es zu jedem Intervall $I' \subset\subset I$ eine Konstante $c_{I'}$, so da

$$(7.10) \quad \begin{aligned} g(\Psi_I(\lambda, w)) &\leq c_{I'}, & (\lambda, \lambda' \in I', w \in \Sigma_I). \\ |g(\Psi_I(\lambda, w)) - g(\Psi_I(\lambda', w))| &\leq c_{I'} |\lambda - \lambda'| \end{aligned}$$

Damit ist durch

$$T_I(\lambda, B)u := \sum_{\alpha=1}^{2N+1} g(\Psi_I(\lambda, \cdot)) \tilde{\Gamma}_I^{\sim}(\lambda) \{G_{1,\mu}^B(P_{-\delta/2} u_{\alpha})\} \quad \left(\begin{array}{l} \lambda \in I \\ u \in K \end{array} \right)$$

ein linearer Operator $T_I(\lambda, B) \in B(K, M_I)$ definiert.

$T_I(\cdot, B) : I \rightarrow B(K, M_I)$ ist bzgl. der Norm in $B(K, M_I)$ lokal h"olderstetig. In einem Intervall $I' \subset\subset I$ ist θ , $\theta \in (0, 1]$, falls $\delta > 3$, $0 < \theta < \min\{(\delta-1)/2, 1\}$, falls $\delta \leq 3$, ein zul"assiger H"olderexponent. Ferner gilt f"ur $u \in K$

$$T_I(\lambda, B)u = (F_I E_1(I) B^* u)(\lambda) \quad (L\text{-f.} \ddot{u}. \text{ in } I),$$

so da

Zum Nachweis von Theorem 1.19, II sieht man, daß aus [S 2]' die Voraussetzungen [S 2] folgen, so daß die bisherigen Ausführungen übernommen werden können.

Mit $\theta := 0$, so daß $\mathbb{D}_0 = L^2$, $\mathbb{D}_1 = H^{r,2}$, werden die Bedingungen (K6) - (K8), (K9, I)', (K10) und (K11) verifiziert.

Wie zuvor folgt dann aus Satz 3.15 und Bemerkung 3.16 die Behauptung in Theorem 1.19, II.

Anhand der Definition von K , A , B und C sieht man bereits, daß der Nachweis dieser Bedingungen wie in § 6 erfolgen wird. Deshalb beziehen wir uns weitgehend auf die dortigen Ausführungen.

Zunächst kann in den Bemerkungen über die Räume V und X in § 6 $H^{r,2}$ durch $H^{r,2}$ ersetzt werden. Auf diese Weise folgt (K6).

Der im Folgenden benötigte positive selbstadjungierte Operator $A_1 \in B(K)$ wird durch

$$A_1 : K \rightarrow K, \quad \{(A_1 u)_\mu\} := \{P_{-\delta/2} u_\mu\}$$

definiert. Man sieht sofort, daß A_1 die genannten Eigenschaften hat. $L = A_1^{-1}$ ist dann gegeben durch $Lu = \{P_{\delta/2} u_\mu\}$.

Dementsprechend ist $(L, L^*) : K \rightarrow K$ mit $L^* = (L^{-1})^*$ und $K_X = \prod_{\mu=1}^{2N+1} L_{X, \delta/2}^2$ mit der Norm $\|u\|_{K_X} := (\sum_{\mu=1}^{\mu-1} \|u_\mu\|_{X, \delta/2}^2)^{1/2}$.

Ferner ist der unitäre Operator $A_1^{-1,0} : K_1 \rightarrow K_1$ durch $\{(A_1^{-1,0} u)_\mu\} = \{P_{(\delta - \delta')} \delta/2 u_\mu\}$ gegeben. Dann sei

$$D(G) := D(A), \quad Gu := A_1^{-1,0} Au \quad (u \in D(G)).$$

Offensichtlich ist $Gu \in K_{-1}$ ($u \in D(G)$) und $A = A_1^{0,-1}G$, so daß (K7) erfüllt ist.

Infolge der zusätzlichen Voraussetzungen in [S 2]'III ist $P_{\delta/2} a_\mu f^* T_\mu f u \in L^2$ ($u \in H^{r,2}$) und $Q(P_{\delta/2} a_\mu) f^* T_\mu f \in B(H^{r,2}, L^2)$ ($1 \leq \mu \leq 2N+1$) (vgl. Lemma 5.9,1). Zusammen mit (7.1) folgt

$$G(H^{r,2}) \subset K, \quad \|Gu\|_K \leq c(\|H_1|u\| + \|u\|) \quad (u \in H^{r,2})$$

mit einer geeigneten Konstanten c . Damit ist (K8) gezeigt.

Setzt man im Beweis zu (K9,I)' in §6

$$G_{\gamma,\mu}^B := G_{\gamma\delta/2}(P_{\delta/2} b_\mu^*) \in B(L_{\gamma\delta/2}^2) \quad (1 \leq \mu \leq 2N+1, \gamma \in \mathbb{R})$$

$$+_{\gamma}^B(\lambda)u := \sum_{\nu=1}^{2N+1} g(\psi_1(\lambda, \cdot)) \tilde{\Gamma}_1^{-1}(\gamma) G_{\gamma,\nu}^B u, \quad (u \in K_\gamma, \gamma \geq 1, \lambda \in \mathbb{R})$$

und beachtet man, daß wegen (7.10) $\beta = 1$, kann die Begründung in §6 wörtlich übernommen werden.

Ähnliches gilt für (K10). In §6 nimmt man die gleiche Ersetzung der Indizes vor wie im Beweis zu Lemma 7.8,2, ferner wird $r/2$ durch r ersetzt. Dann läßt sich der Beweis in §6 übertragen.

Auch für (K11) kann man sich weitgehend auf die Begründung in §6 beziehen.

Da $h_j^{(0)}(u,v) = \langle u, H_j v \rangle$ ($u \in L^2, v \in H^{r,2}$) und $H_j \in B(H^{r,2}, L^2)$, genügt es zum Nachweis von (K11) eine Teilmenge $\tilde{S} \subset S$ zu finden, so daß $\tilde{S} \subset H^{r,2}$ und $\tilde{S}$ dicht in $H^{r,2}$ ist.

$$\tilde{S} := \{ f^* \varphi; \varphi \in C_0^\infty, \text{ supp } \varphi \subset \mathbb{R}^n \setminus Z \}$$

ist dicht in $H^{r,2}$. $c_u := \max\{\|P_{\delta/2} T P_{-r} u\|, \|P_{\delta/2} T^* P_{-r} u\|\}$
 $(u \in \tilde{\mathbf{S}})$ hat zur Folge, daß

$$|h_1^{(0)}(u, v)| + |\langle u, v \rangle| \leq 2c_u \|(Av)_{2N+1}\| \leq 2c_u \|v\|_Y$$

$(u \in \tilde{\mathbf{S}}, v \in H^{r,2})$ gilt und deshalb $\tilde{\mathbf{S}}$ Teilmenge von $\mathbf{S}$ ist.

Damit ist die letzte Bedingung (K11) bewiesen und der Nachweis von Theorem 1.19 vollständig.

§ 8 Der Beweis von Theorem 1.20

Die Aussage von Theorem 1.20,1 ist bereits bewiesen.

In (1.7) haben die Konstanten c_1, c_2, c_3 den Wert C_1'', C_2'', C_3'' . Deshalb gilt für $u \in H^{2m,2}$

$$(8.1) \quad \|u\|_{2m,2} \leq C_1''^{-1} 2^{1/2} \|H_1 u\| + C_1''^{-1} C_3'' 2^{1/2} \|u\|$$

Aufgrund von [S 4] ist $Q(q_\mu^*) \in B(H^{2m,2})$ und $Q(q_\mu) \delta^* T_\mu \delta \in B(H^{2m,2}, L^2)$ ($1 \leq \mu \leq N$). Deshalb ist durch

$$D(V) := H^{2m,2}, \quad Vu := \sum_{\mu=1}^N q_\mu \delta^* T_\mu \delta (q_\mu^* u) \quad (u \in D(V)),$$

$V: H^{2m,2} \rightarrow L^2$ wohldefiniert. Wie man sieht, ist V symmetrisch. Mit $C_\mu, C'_\mu, t_\mu, s_\mu$ ($1 \leq \mu \leq N$) wie in [S 4] folgt aus (1.15)

$$(8.2) \quad \begin{aligned} \left\| \sum_{\mu=2m}^{\infty} q_\mu \delta^* T_\mu \delta (q_\mu^* u) \right\| &\leq \sum_{\mu=2m}^{\infty} C'_\mu t_\mu \|q_\mu^* u\|_{2m,2} \\ &\leq \sum_{\mu=2m}^{\infty} C'_\mu C_\mu t_\mu \|u\|_{2m,2} \leq C_0''' \|u\|_{2m,2} \quad (u \in H^{2m,2}). \end{aligned}$$

Wenn $s_\mu < 2m$, erhält man aus Lemma 5.2,4 zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Konstante $c_{\mu,\varepsilon}$, so daß $\|u\|_{s_\mu,2} \leq \varepsilon \|u\|_{2m,2} + c_{\mu,\varepsilon} \|u\|$ ($u \in H^{2m,2}$). Demnach ist für $u \in H^{2m,2}$

$$(8.3) \quad \begin{aligned} \left\| \sum_{s_\mu < 2m} q_\mu \delta^* T_\mu \delta (q_\mu^* u) \right\| &\leq \sum_{s_\mu < 2m} C'_\mu t_\mu \|q_\mu^* u\|_{s_\mu,2} \\ &\leq \sum_{s_\mu < 2m} C'_\mu C_\mu t_\mu \varepsilon \|u\|_{2m,2} + \sum_{s_\mu < 2m} C_\mu'^2 t_\mu c_{\mu,\varepsilon} \|u\|. \end{aligned}$$

Da $C_0''' C_1''^{-1} 2^{1/2} < 1$, folgt aus (8.2), (8.3) und (8.1), wenn nur ε genügend klein ist, daß V H_1 -beschränkt ist mit einer H_1 -Schranke $c < 1$. Infolgedessen ist $H_2 := H_1 + V$,

$D(H_2) := D(H_1) = H^{r,2}$ selbstadjungiert.

Nach wie vor ist $J = [\lambda_{\min}, \infty) \setminus \Lambda$ und $I \subset J$ eine Zusammenhangskomponente von J . Wie aus § 3 (Bem. 3.11, Lemma 3.7, Bem. 3.8) hervorgeht, ist Theorem 1.20,3 bewiesen, wenn nachgewiesen wird, daß

$$(K1), (K2, I), (SC3, I), (K4), (SC5) \text{ und } \sigma_w(H_1) = \sigma_w(H_2)$$

gilt.

Zu $(K2, I)$ ist nichts mehr zu sagen.

Zum Nachweis der übrigen Bedingungen sei

$$H := L^2$$

$$D(A) := L^2, \quad Au := P_{\delta/2} u$$

$$D(B_0) := H^{2m,2}, \quad B_0 u := P_{\delta/2} V u$$

Wegen [S 4]III ist $B_0 : H^{2m,2} \rightarrow L^2$ wohldefiniert. B_0 ist abschließbar, weil V symmetrisch ist. Die Abschließung von B_0 sei B . A ist injektiv, $A \in B(L^2)$ und wegen Lemma 5.2,2 ist $A|_{H^{2m,2}} \in B_\infty(H^{2m,2}, L^2)$. Folglich ist $A|_{H_1}$ kompakt. Das beweist $(K4)$ und $(SC5)$. Man sieht sofort, daß mit $\theta = 1$ die Voraussetzungen von Satz 3.1 erfüllt sind; mit Bem. 3.2 folgt daraus $(K1)$. $\sigma_w(H_1) = \sigma_w(H_2)$ erhält man aus $(K4)$ und $(K1)c$.

$(SC3, I)$ beruht auf Lemma 4.27 und dem folgenden Satz 8.4.

Der Beweis von Satz 8.4 wird vorerst zurückgestellt.

(8.4) Satz

Sei $T_0 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$, $q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$, $\tilde{r}, s, \rho \in \mathbb{R}$ gegeben, so daß
 $0 \leq s \leq \tilde{r}$, $0 \leq \rho \leq 2$. Ferner sei $P_{-s} T_0 \in C_B^1$; falls $s = \tilde{r}$, sei
 $P_\rho q \in L^m$, falls $s < \tilde{r}$, gelte für ein ε mit $0 < \varepsilon < \tilde{r} - s$, daß
 $P_\rho q \in L^2_{\tilde{r}-s-\varepsilon}$.

Dann ist $q f^* T_0 f \varphi \in L^2_{\rho/2}$ ($\varphi \in S$) und mit einer Konstanten
 c_{q, T_0} gilt $\|q f^* T_0 f \varphi\|_{\rho/2} \leq c_{q, T_0} \|\varphi\|_{\tilde{r}, -\rho/2, 2}$.
 Die lineare Abbildung

$$Q(q, T_0) : (S, \|\cdot\|_{\tilde{r}, -\rho/2, 2}) \rightarrow L^2_{\rho/2}, \quad \varphi \mapsto q f^* T_0 f \varphi,$$

ist demnach eine stetige Fortsetzung $Q(q, T_0) \in B(H_{-s-\varepsilon}^{r, 2}, L^2_{\rho/2})$.
 Falls $u \in H^{r, 2}$, ist $Q(q, T_0)u = q f^* T_0 f u$.

Da $q_\mu \in C_B^{2m}$ ($1 \leq \mu \leq N$), sieht man mit Lemma 4.24,3, daß
 $Q(q_\mu^*) \in B(H_{-\varepsilon/2}^{2m, 2})$ ($1 \leq \mu \leq N$). Aufgrund von Lemma 4.27 und
 Satz 8.4, wobei $\tilde{r} = 2m$, $\rho = \delta$, sind durch

$$M_I(\lambda)u := \frac{1}{2\pi i} P_{\delta/2} Q(P_{-\delta}, 1) ((R_1^+(\lambda) - R_1^-(\lambda)) P_{-\delta/2} u)$$

$$\tilde{M}_I(\lambda)u := \frac{1}{2\pi i} P_{\delta/2} \sum_{\mu=1}^N Q(q_\mu^*, T_0) ((R_1^+(\lambda) - R_1^-(\lambda)) P_{-\delta/2} u)$$

($\lambda \in I$, $u \in L^2$) lineare Operatoren $M_I(\lambda)$, $\tilde{M}_I(\lambda) \in B(L^2)$ definiert. Die Abbildungen

$$M_I(\cdot) : I \rightarrow B(L^2), \quad \lambda \mapsto M_I(\lambda),$$

$$M_I(\cdot) : I \rightarrow B(L^2), \quad \lambda \mapsto \tilde{M}_I(\lambda),$$

sind bzgl. der Norm in $B(L^2)$ lokal hölderstetig in I .

(8.5) Lemma

Sei $u, v \in D(A^*) = L^2$ und $w \in D(B^*)$. Dann gilt

$$1) \quad \frac{d}{d\lambda} \langle E_1(\lambda) A^* u, A^* v \rangle = \langle M_I(\lambda) u, v \rangle \quad L\text{-f.ü. in } I$$

$$2) \quad \frac{d}{d\lambda} \langle E_1(\lambda) A^* u, B^* w \rangle = \langle \tilde{M}_I(\lambda) u, w \rangle \quad L\text{-f.ü. in } I.$$

Beweis

zu 2): Sei $I' = [a, b] \subset I$ ein Intervall in I . Die Spektralschar $E_1(\cdot)$ von H_1 ist stetig in I . Damit hat der Spektralsatz die Form

$$\langle (E_1(\lambda) - E_1(a)) f, g \rangle = \lim_{\epsilon \rightarrow 0+} \int_a^\lambda \langle \frac{1}{2\pi i} (R_1(t+i\epsilon) - R_1(t-i\epsilon)) f, g \rangle dt$$

($f, g \in L^2$, $\lambda \in I'$). Sei $u \in D(A^*)$, $w \in D(B^*)$ und $f := A^* u$, $g := B^* w$. Dann ist $R_1(t \pm i\epsilon) f \in H^{2m, 2}_C D(B)$ ($\epsilon > 0$, $t \in I$); ferner ist $A^* u = Au$. Folglich ist

$$\begin{aligned} h_\epsilon(t, u, w) &:= \langle \frac{1}{2\pi i} (R_1(t+i\epsilon) - R_1(t-i\epsilon)) A^* u, B^* w \rangle \\ &= \langle \frac{1}{2\pi i} B(R_1(t+i\epsilon) - R_1(t-i\epsilon)) Au, w \rangle \\ &= \langle \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} P_{\delta/2} q_\mu \zeta^* T_\mu \zeta(q_\mu^* ((R_1(t+i\epsilon) - R_1(t-i\epsilon)) Au), w \rangle \\ &= \langle \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} P_{\delta/2} \omega(q_\mu, \frac{1}{T_\mu}) \omega(q_\mu^*) (P_1^+(t+i\epsilon) - P_1^-(t-i\epsilon)) P_{-\delta/2} u, w \rangle. \end{aligned}$$

Wegen Satz 3.4 und Lemma 4.17 gilt $\lim_{\epsilon \rightarrow 0+} h_\epsilon(t, u, w) = \langle M_I(t) u, w \rangle$ ($t \in I$) und zu jedem $\epsilon_0 > 0$ gibt es eine Konstante c_{I', ϵ_0} , so daß $|h_\epsilon(t, u, w)| \leq c_{I', \epsilon_0} \|u\| \|w\|$ ($t \in I'$, $0 < \epsilon < \epsilon_0$). Aus dem Satz von der majorisierten Konvergenz folgt somit

$$\langle (E_1(\lambda) - E_1(a)) A^* u, B^* w \rangle = \int_a^\lambda \langle \tilde{M}_I(t) u, w \rangle dt \quad (\lambda \in I'),$$

Als

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} S_1(t) A^* u, R^* w \rangle = \langle M_I(t) u, w \rangle \quad (L\text{-f.u. in } l^2).$$

Dies beweist 2), denn I wird durch abzählbar viele derartige Intervalle I' ausgeschöpft.

Analog geht man bei 1) vor, denn

$$\begin{aligned} & \lim_{t \rightarrow \infty} \langle \frac{1}{2\pi i} (R_1(t+1t) - R_1(t-1t)) A^* u, A^* v \rangle \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \langle \frac{1}{2\pi i} P_{-N} Q(P_{-N}, 1) (R_1^+(t+1t) - R_1^-(t-1t)) P_{-N} u, v \rangle \\ &= \langle M_I(t) u, v \rangle \quad (t \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

Um den Beweis von Satz 8.4 abzukürzen, werden einige dabei verwendete Argumente im Voraus behandelt.

Wir benutzen die Funktionen

$$W_p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \quad (p \geq 0)$$

$$W_p(x) = \int_0^\infty \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x-y) \cdot \xi} \left(\sum_{|\alpha| \leq p} \frac{1}{\alpha!} \xi^\alpha \right) e^{-\frac{1}{2} \xi^2} d\xi \right) dt, \\ \text{wobei } p \in \mathbb{N}, \quad p \sim (n+1)/2, \quad Q_p(\xi) := \prod_{v=0}^{p-1} (\xi^2 + 2v) \text{ und } J_1 \text{ die}$$

Besselfunktion erster Art der Ordnung 1 ist (vgl. [18], S.109). W_0 ist reell, weil die Besselfunktion $J_{(n+2p-2)/2}$ reell ist ([14], S.65). Für W_0 gelten die asymptotischen Abschätzungen (vgl. [18], S.110)

$$(8.6) \quad W_0(x) = \begin{cases} O(|x|^{\sigma-n}), & \text{für } |x| \rightarrow 0, \text{ falls } 0 < \sigma < n \\ O(1 - \log|x|), & \text{für } |x| \rightarrow 0, \text{ falls } \sigma = n \end{cases}$$

$$(8.6) \quad W_{\sigma}(x) = \begin{cases} O(1) & , \text{ für } |x| \rightarrow 0, \text{ falls } \sigma > n \\ O(|x|^{-k}), & \text{ für } |x| \rightarrow \infty, (k \in \mathbb{N}). \end{cases}$$

Insbesondere ist $W_{\sigma} \in L^1$ ($\sigma > 0$). Es gilt ([18], S.110)

$$(8.7) \quad (f W_{\sigma})(x) = P_{-\sigma}(x) \quad (x \in \mathbb{R}^n).$$

Zu dem folgenden Hilfssatz wird an die Definition der Funktionen w_{α} erinnert (S.11) und daran, daß $N_{\alpha} \subset M_n$ ($\alpha > 0$).

(8.8) Lemma

1) Sei $k \in \mathbb{N}$, $\sigma \geq 0$ und $k > n + 2\sigma + 1$. Dann gibt es ein $c > 0$, so daß

$$\int_{|x-y| \geq 1} (1+|y|)^{2\sigma} |x-y|^{-k} dy \leq c 4^{\sigma} (1+|x|^2)^{\sigma} \quad (x \in \mathbb{R}^n).$$

2) Sei $q \in N_{\alpha}$ ($\alpha > 0$) und $k \in \mathbb{N}$ mit $k > n + 1$ gegeben. Dann gibt es ein $c > 0$, so daß

$$\int_{|x-y| \geq 1} |q(y)|^2 |x-y|^{-k} dy \leq c M_n(q) \quad (x \in \mathbb{R}^n).$$

3) Sei $0 < \varepsilon < \sigma$. Dann ist $\int_{|y| \leq 1} (w_{\sigma}(y))^2 (w_{2(\sigma-\varepsilon)}(y))^{-1} dy < \infty$.

Beweis

zu 1): Wenn $|x-y| \geq 1$, ist $(1+|y|^2) \leq 2(1+|x|^2+|x-y|^2) \leq 4(1+|x|^2)|x-y|^2$. Da $k-2\sigma > n+1$, folgt

$$\begin{aligned} \int_{|x-y| \geq 1} (1+|y|^2)^{\sigma} |x-y|^{-k} dy &\leq 4^{\sigma} (1+|x|^2)^{\sigma} \int_{|x-y| \geq 1} |x-y|^{-k+2\sigma} dy \leq \\ &\leq 4^{\sigma} (1+|x|^2)^{\sigma} \int_{|x-y| \geq 1} |x-y|^{-n-1} dy = c 4^{\sigma} (1+|x|^2)^{\sigma}. \end{aligned}$$

zu 2): Die Behauptung folgt aus ([18], Kap. 5, Lemma 2.6)

mit $G(x) := |x|^{-k}$ und $p := 2$.

zu 3): Diese Aussage folgt in einfacher Weise durch Fall-

unterscheidung, wenn man beachtet, daß $\int_{|x| \leq 1} |y|^\alpha dy < \infty$,

wenn $\alpha > -n$ und $|x|^\alpha (1 - \log|x|) = O(1)$, für $|x| \rightarrow 0$, wenn $\alpha > 0$.

(8.9) Lemma

Sei $q \in C_B^k$ ($k \geq 1$). Dann ist $qu \in H^{\sigma, 2}$ ($u \in S$, $|\sigma| \leq k$, $\sigma \in \mathbb{R}$)

und es gibt eine Konstante $c_{q, \sigma}$, so daß

$\|qu\|_{\sigma, 2} \leq c_{q, \sigma} \|u\|_{\sigma, 2}$. Infolgedessen hat die Abbildung

$$Q(q) : (S, \|\cdot\|_{\sigma, 2}) \rightarrow H^{\sigma, 2}, \quad u \mapsto qu,$$

eine stetige Fortsetzung $Q(q) \in B(H^{\sigma, 2})$.

Beweis

Falls $\sigma = 0$, $\sigma = k$, ist nichts mehr zu beweisen. Falls $0 < \sigma < k$, folgt die Behauptung aus dem (Interpolations-) Satz 4.11.

Falls $-k \leq \sigma < 0$, ist $qu \in H^{\sigma, 2}$, indem man L^2 als Teilmenge von S' auffaßt. Mit q ist auch $q^* \in C_B^k$. Für $u, v \in S$ gilt deshalb, da $-\sigma > 0$,

$$\begin{aligned} |\langle f^* P_{-\sigma} f v, f^* P_{\sigma} f qu \rangle| &= |\langle v, qu \rangle| = |\langle q^* v, u \rangle| \\ &= |\langle f^* P_{-\sigma} f (q^* v), f^* P_{\sigma} f u \rangle| \leq c_{q^*, -\sigma} \|v\|_{-\sigma, 2} \|u\|_{\sigma, 2}. \end{aligned}$$

Nach stetiger Fortsetzung dieser Ungleichung auf $H^{-\sigma, 2}$ ist demnach für jedes $u \in S$ die Abbildung

$$h_{qu} : H^{-\sigma, 2} \rightarrow \mathbb{C}, \quad v \mapsto \langle f^* P_{-\sigma} f v, f^* P_{\sigma} f (qu) \rangle,$$

linear und stetig mit $\|\tilde{h}_{qu}\|_{B(H^{-\sigma,2},\mathbb{C})} \leq c_{q^*, -\sigma} \|u\|_{\sigma,2}$.

Andererseits ist

$$\begin{aligned} \|\tilde{h}_{qu}\|_{B(H^{-\sigma,2},\mathbb{C})} &= \sup_{\substack{v \in H^{-\sigma,2} \\ \|v\|_{-\sigma,2} \leq 1}} |\langle \delta^* P_{-\sigma} f v, \delta^* P_{\sigma} f(qu) \rangle| \\ &= \sup_{\substack{v \in L^2 \\ \|v\| \leq 1}} |\langle v, \delta^* P_{\sigma} f(qu) \rangle| = \|\delta^* P_{\sigma} f(qu)\| = \|qu\|_{\sigma,2}. \end{aligned}$$

Mit $c_{q,\sigma} := c_{q^*, -\sigma}$ folgt die Behauptung.

Beweis von Satz 8.4

Sei $s = \tilde{r}$:

Da $P_{\rho} q \in L^{\infty}$, $T_0 P_{-\tilde{r}} \in C_B^1$ und $\rho/2 \leq 1$, folgt aus Lemma 8.9 für $u \in S$

$$\begin{aligned} \|q \delta^* T_0 f u\|_{\ell/2} &\leq c_q \|P_{-\rho/2} \delta^* T_0 f u\| = c_q \|P_{-\rho/2} f T_0 u\| \\ &= c_q \| (T_0 P_{-\tilde{r}}) P_{\tilde{r}} f u \|_{-\rho/2,2} \leq c_q \|P_{\tilde{r}} f u\|_{-\rho/2,2} = \\ &= c_{q,T_0} \|u\|_{\tilde{r}, -\rho/2,2}. \end{aligned}$$

Sei $s < \tilde{r}$:

Es wird zunächst gezeigt, daß mit einer Konstanten c_q

$$\|q(W_{r-s}^* u)\|_{\ell/2} \leq c_q \|u\|_{\rho/2}^2 \quad (u \in S).$$

Es gilt für $x \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} |(W_{r-s}^* u)(x)|^2 &\leq 2 \left| \int_{|x-y| \leq 1} |u(y)| |W_{r-s}(x-y)| dy \right|^2 \\ &+ 2 \left| \int_{|x-y| \geq 1} |u(y)| |W_{r-s}(x-y)| dy \right|^2 =: I_1(x) + I_2(x). \end{aligned}$$

Weil $0 \leq \rho \leq 2$, ist $k := n + 4 > n + \rho + 1$. Dann folgt aus

(8.6) und Lemma 8.8,1,2

$$\begin{aligned}
 I_2(x) &\leq c_{\tilde{r}-s}'' \left| \int_{|x-y| \geq 1} |u(y)| |x-y|^{-k} dy \right|^2 \\
 &\leq c_{\tilde{r}-s}'' \int_{|x-y| \geq 1} |(P_{-\rho/2}u)(y)|^2 |x-y|^{-k} dy \\
 &\quad \times \int_{|x-y| \geq 1} |x-y|^{-k(1+|y|^2)^{\rho/2}} dy \\
 &\leq c_{\tilde{r}-s}'' (1+|x|^2)^{\rho/2} \int_{|x-y| \geq 1} |(P_{-\rho/2}u)(y)|^2 |x-y|^{-k} dy.
 \end{aligned}$$

Wenn $|x-y| \leq 1$, gilt $(1+|y|^2)^{\rho/2} \leq 4(1+|x|^2)^{\rho/2}$ (da $\rho \leq 2$) und $|W_{\tilde{r}-s}(x-y)| \leq c_{\tilde{r}-s}'' w_{\tilde{r}-s}(x-y)$ (vgl. 8.6). Aus Lemma 8.8,3 erhält man

$$\begin{aligned}
 I_1(x) &\leq 2c_{\tilde{r}-s}''^2 \left| \int_{|x-y| \leq 1} |(P_{-\rho/2}u)(y)| (w_{2(\tilde{r}-s-\epsilon)}(x-y))^{1/2} \right. \\
 &\quad \left. \cdot w_{\tilde{r}-s}(x-y) (w_{2(\tilde{r}-s-\epsilon)}(x-y))^{-1} (1+|y|^2)^{\rho/4} dy \right|^2 \\
 &\leq c_1 (1+|x|^2)^{\rho/2} \int_{|x-y| \leq 1} |(P_{-\rho/2}u)(y)|^2 w_{2(\tilde{r}-s-\epsilon)}(x-y) dy.
 \end{aligned}$$

Mit den Konstanten c_1 und $c_2 := c_{\tilde{r}-s}''$, die von $\tilde{r}-s$ und $\tilde{r}-s-\epsilon$ abhängen, gilt demnach

$$\begin{aligned}
 &|P_{\rho/2}(x) * u(x) (W_{\tilde{r}-s} * u)(x)|^2 \\
 &\leq c_1 \int_{|x-y| \leq 1} |(P_{-\rho/2}u)(y)|^2 |(P_{\rho}q)(x)|^2 w_{2(\tilde{r}-s-\epsilon)}(x-y) dy \\
 &\quad + c_2 \int_{|x-y| \geq 1} |(P_{-\rho/2}u)(y)|^2 |(P_{\rho}q)(x)|^2 |x-y|^{-k} dy.
 \end{aligned}$$

Ersetzt man auf der rechten Seite dieser Abschätzung die Integration bzgl. y durch die Integration bzgl. x , folgt wegen $P_{\rho}q \in N_2(\tilde{r}-s-\epsilon)$ und Lemma 8.8,2, daß die anschließende

Integration bzgl. y über $\mathbb{R}^n$ einen endlichen Wert liefert.

Der Satz von Fubini ergibt dann, daß $q(W_{\tilde{r}-s}^* u) \in L_{p/2}^2$ und

$$\begin{aligned} \|q(W_{\tilde{r}-s}^* u)\|_{p/2}^2 &\leq (c_1 N_2(\tilde{r}-s-\varepsilon, (P_f q)) + c c_2 M_n(P_f q)) \|u\|_{-f/2}^2 \\ &= c_q \|u\|_{-p/2}^2 \quad (u \in S). \end{aligned}$$

Mit $v \in S$ ist auch $u := f^* P_{\tilde{r}-s} v \in S$ und wegen (8.7) ist $v = W_{\tilde{r}-s}^* u$. Infolgedessen gilt für $v \in S$

$$(8.10) \quad \|qv\|_{p/2}^2 \leq c_q \|P_{-p/2} f^* P_{\tilde{r}-s} v\|_{-p/2,2}^2 = c_q \|P_{\tilde{r}-s} f v\|_{-p/2,2}^2.$$

Da S dicht in $H^{\tilde{r}-s,2}$ ist und L^2 stetig in $L_{-p/2}^2$ eingebettet werden kann, gilt (8.10) auch für $v \in H^{\tilde{r}-s,2}$.

Wenn $u \in S$, ist $v := f^* T_0 u \in H^{\tilde{r}-s,2}$ und $f v = T_0 u$. Aus Lemma 8.9, da $T_0 P_{-s} \in C_B^1$, $p/2 \leq 1$, und (8.10) folgt dann

$$\begin{aligned} \|q f^* T_0 u\|_{p/2}^2 &\leq c_q \|(P_{-s} T_0) f v\|_{-p/2,2}^2 \leq c_{q,T_0} \|P_{\tilde{r}} f u\|_{-p/2,2}^2 \\ &= c_{q,T_0} \|u\|_{\tilde{r},-p/2,2}^2 \quad (u \in S). \end{aligned}$$

Daraus erhält man zunächst die Existenz der stetigen Fortsetzung $Q(q, T_0) \in B(H_{-p/2}^{\tilde{r},2}, L_{p/2}^2)$.

Wie man sieht, ist $q \in N_{2(\tilde{r}-s-\varepsilon)} \subset N_2(\tilde{r}-s)$, folglich $Q(q) f^* T_0 f \in B(H^{\tilde{r},2}, L^2)$ (vgl. Lemma 5.2,1 und den Beweis zu Lemma 5.9,1). Ferner folgt aus der letzten Ungleichung, daß

$$\|q f^* T_0 u\|_{p/2}^2 \leq \|q f^* T_0 u\|_{p/2}^2 \leq c_{q,T_0} \|u\|_{\tilde{r},-p/2,2}^2 \leq c_{q,T_0} \|u\|_{\tilde{r},2}^2$$

($u \in S$). Das beweist schließlich, daß $q f^* T_0 u = Q(q, T_0) u$, wenn $u \in H^{\tilde{r},2}$.

(8.11) Bemerkung

1) Für V aus Theorem 1.10 gibt es eine Konstante c_V , so daß

$$\|Vu\|_{r,-\delta/2,2} \leq c_V (1 + |\cdot|)^{-\delta/2} \|\cdot\|_{r,-\delta/2,2}^k \|Vu\|_{r,-\delta/2,2} \quad (u \in S).$$

2) Falls zusätzlich zu [S 2] die Bedingungen (2.2) und (2.3) erfüllt sind, gibt es zu jedem $k \in \mathbb{N}$, $2k \geq r$, eine Konstante $c_{k,V}$, so daß für V aus Theorem 1.19

$$\|Vu\|_{r,-\delta/2,2} \leq c_{k,V} (1 + |\cdot|)^{-\delta/2} \|\cdot\|_{r,-\delta/2,2}^k \|Vu\|_{r,-\delta/2,2} \quad (u \in S).$$

Beweis

zu 1): Beachtet man die Definition von V und, daß

$\|\cdot\|_{r,-\delta/2,2} = \|\cdot\|_{r,-\delta/2,2}^k$, folgt die Behauptung aus der letzten Ungleichung im Beweis zu Satz 8.4, wobei $\tilde{r} = 2m, \tilde{\delta} = \delta$.

zu 2): Unter den angegebenen Bedingungen folgt aus Satz 8.4 zunächst, daß $\|g_{\alpha} f^* T_{\alpha} f u\| \leq c_{\alpha}^{1/2} \|u\|_{r,-\delta/2,2}$ ($\alpha \in S$, $1 \leq \alpha \in \mathbb{N}$). Wenn $2k \geq r$, ist $P_r P_{-2k} \in C_B^{\infty}$; folglich

$$\begin{aligned} \|u\|_{r,-\delta/2,2} &= \|P_r f u\|_{r,-\delta/2,2} = \|(P_r P_{-2k}) P_{2k} f u\|_{r,-\delta/2,2} \\ &\leq c_k \|P_{2k} f u\|_{r,-\delta/2,2} = c_k \|(1 + |\cdot|)^{-\delta/2} \|\cdot\|_{r,-\delta/2,2}^k f u\| \quad (u \in S). \end{aligned}$$

Beachtet man die Definition von V in Theorem 1.19, folgt daraus die Behauptung.

Literaturverzeichnis

- [1] AGMON, S., Lectures on elliptic boundary value problems. Van Nostrand, New York 1965
- [2] ALSHOLM, P. - G. SCHMIDT, Spectral and scattering theory for Schrödinger operators.
Arch. Rat. Mech. Anal. 40, (1971), 281 - 311.
- [3] CODDINGTON - LEVINSON, Theory of ordinary differential equations. McGraw Hill, New York 1955
- [4] FEDERER, H., Geometric measure theory.
Springer Verlag, Berlin - New York 1969
- [5] HARTMAN, P., Ordinary differential equations.
J. Wiley, Sons, New York 1964
- [6] JÖRGENS, K., WEIDMANN, J., GREIFENEGGER, U.,
WINKLER, M. Streutheorie für Schrödinger-Operatoren.
Ergebnisbericht eines von der Deutschen
Forschungsgemeinschaft geförderten Forschungs-
vorhabens. 1972 (unveröffentlicht).
- [7] JÖRGENS, K. - WEIDMANN, J., Spectral properties of
Schrödinger operators. Lecture Notes in mathe-
matics 313, Springer Verlag Berlin - New York 1973
- [8] JÖRGENS, K., Lineare Integraloperatoren.
Teubner Verlag Stuttgart 1970

- [9] KATO, T., Perturbation theory for linear operators.
Springer Verlag Berlin - New York 1966
- [10] KURODA, S.T., Scattering theory for differential
operators, I, operator theory.
Journal of Math. Soc. Japan, vol. 25, Nr. 1 1973
- [11] KURODA, S.T., Scattering theory for differential
operators, II, self-adjoint elliptic operators.
Journal of Math. Soc. Japan, vol.25, Nr.2 1973
- [12] KURODA, S.T., Some remarks on scattering for
Schrödinger operators.
J. Fac. of Science, Univ. of Tokyo, Sec.I,
vol.17, 315 - 329, 1970
- [13] LIONS, J.L., - E. MAGENES, Problèmes aux limites
non homogènes et applications. Vol.1.
Dunod, Paris 1968
- [14] MAGNUS-OBERHETTINGER-SONI, Formulas and theorems for
special functions of mathematical physics.
Springer Verlag New York 1966
- [15] MUSCHELISCHWILI, N.I., Singuläre Integralgleichungen
Akademie Verlag Berlin 1965
- [16] PUTNAM, C.R., Commutation properties of Hilbert
space operators and related topics.
Springer Verlag Berlin - New York 1967

- [17] RUDIN, W., Real and complex analysis.
McGraw Hill New York 1966
- [18] SCHECHTER, M., Spectra of partial differential operators. North Holland Publ. Comp.
Amsterdam - London 1971
- [19] SCHECHTER, M., Scattering theory for elliptic operators of arbitrary order. (Preprint)
- [20] SARD, A., The measure of the critical points of differentiable maps.
Bull. Amer. Math. Soc. 48 (1942), 883 - 890.
- [21] STEIN, E., Singular integrals and differential properties of functions.
Princeton University Press, Princeton N.J. 1970
- [22] TREVES, F., Topological vector spaces, distributions and kernels.
Academic Press, New York 1967
- [23] VESELIĆ, K., - J. WEIDMANN, Asymptotic estimates of wave functions and the existence of wave operators. (Preprint)
- [24] YOSIDA, K., Functional analysis. 2. Ausgabe.
Springer Verlag Berlin - New York 1968

Lebenslauf

Geburtsdatum : 11.1.1944 in Crimmitschau/Sachsen

Schulbildung : 1950 - 1954 Volksschule in Waldshut
1954 - 1963 Gymnasium in Waldshut

Bundeswehr : 1.4.1963 - 31.3.1965

Studium : 1.5.1965 - 4.11.1970 Universität München
22.2.1968 Diplom-Vorprüfung in Mathematik
27.10.1970 Diplom-Hauptprüfung in Mathematik
Diplomarbeit bei Prof.Dr.W.Roelcke :
" Linearkompakte topologische lineare Räume "

Beruflicher Werdegang :

15.11.1970 - 30.9.1972 wissenschaftlicher
Angestellter bei Prof.Dr.K.Jörgens und
Dr.J.Weidmann. Mitarbeit an einem Forschungs-
projekt der Deutschen Forschungs-Gemeinschaft
unter der Leitung von Prof.Dr.K.Jörgens und
Dr.J.Weidmann.

Seit 1.10.1972 bin ich Verwalter der Dienst-
geschäfte eines wissenschaftlichen Assisten-
ten am Mathematischen Institut der Universität
München.

Haimhausen, im Mai 1974

